УДК 511.52

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИОФАНТОВЫМ УРАВНЕНИЯМ

Чёрная Н.Е.,
научный руководитель канд. физ.мат. наук Войтенко Т.Ю.
Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

Треугольник, у которого площадь S и стороны x, y, z выражаются натуральными числами, называют *героновым* треугольником. Геронов треугольник $\langle x, y, z; S\rangle$ называется *основным*, если его стороны x, y, z взаимно просты, то есть $(x, y, z) = 1$.

Вызывает интерес задача о нахождении всех героновых треугольников. Домножая длины сторон такого треугольника на соответствующий общий множитель, можно получить подобный треугольник с целочисленными сторонами и площадью, поэтому по формуле Герона эта задача сводится к решению в целых числах a, b, c, S уравнения:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где $p = (a+b+c)/2$. Брахмагупта (индийский математик и астроном, 598-660 гг.) нашел его решение в параметрическом виде: длины сторон целочисленного геронова треугольника равны

$$k(m^2+n^2), n(m^2+k^2), (n+k)(m^2-nk),$$

где k, m, n − произвольные натуральные числа, причем $m^2 > nk$; при этом площадь треугольника равна $kmn(m+n)(m^2-nk)$.

Несколько примеров: (3, 4, 5), (5, 5, 6), (5, 5, 8), (6, 8, 10), (10, 10, 12), (5, 12, 13), (10, 13, 13), (9, 12, 15), (4, 13, 15), … .

Заметим, что все эти примеры, кроме последнего – пифагоровы треугольники, то есть прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами или равнобедренные треугольники, состоящие из двух равных пифагоровых. Треугольник из последнего примера состоит из двух неравных пифагоровых треугольников со сторонами (12/5; 16/5, 4) и (16/5, 63/5, 13) с общим катетом длины 16/5. Нетрудно показать, что любой геронов треугольник либо прямоугольный (пифагоров), либо составлен из двух пифагоровых.

Вопрос о нахождении общей формулы всех основных героновых треугольников сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = S^2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, S \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta, \gamma) = 1$. В работе [1] находится ряд эквивалентных общих формул, каждая из которых описывает все основные героновы треугольники. Приведем одну из них:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(a+b)(ac^2-bd^2)}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)}, \quad y = \frac{ab(c^2+d^{2)}}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)}, \\ z &= \frac{a^2c^2+b^2d^2}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)}, \quad S = \frac{abcd(a+b)(ac^2-bd^2)}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}, \qquad ac^2 > bd^2, \qquad (a, b) = (c, d) = 1. \qquad (2)$$

Героновы треугольники $\langle x,y,z;S\rangle$, площадь которого выражается квадратом натурального числа A, назовем *тиановым* треугольником. Тианов треугольник $\langle x,y,z;\ A^2\rangle$, стороны которого x,y,z выражаются взаимно простыми числами, назовем *основным*. Хотя известно значительное число основных тиановых треугольников, не существует общей формулы, описывающей все эти треугольники, то есть вопрос о параметризации всех основных тиановых треугольников остается открытым.

Вопрос о нахождении общей формулы всех основных тиановых треугольников сводится к решению в натуральных числах диофантова уравнения четвертой степени с четырьмя неизвестными α,β,γ,A:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=A^4, \tag{3}$$

где

$$\alpha,\beta,\gamma,A\in\mathbb{N},\ \ (\alpha,\beta,\gamma)=1. \tag{4}$$

Отметим, что если x,y,z стороны и S площадь основного тианова треугольника, то $x=\alpha+\beta$, $y=\beta+\gamma$, $z=\gamma+\alpha$, $S=A^2$, где $\alpha,\beta,\gamma,A\in\mathbb{N},(\alpha,\beta,\gamma)=1$.

Общее решение уравнения (3) с условием (4) в натуральных числах неизвестно. Но уравнение (3) с условием (4) имеет бесконечное множество основных решений в натуральных числах α,β,γ,A (см., например, [2]).

Рассматривается также задача об описании пары тиановых треугольников $\langle x_1,y_1,z_1;\ A^2\rangle$, $\langle x_2,y_2,z_2;\ A^2\rangle$ с общей площадью A^2, которая обозначается через $\langle x_1,y_1,z_1;\ A^2;\ x_2,y_2,z_2\rangle$ и называется *основной*, если выполнено $(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)=1$. Например, пара $\langle 231,2002,1925;\ 462^2;539,1233,890\rangle$ является основной, так как $(231,2002,1925,539,1233,890)=1.$ Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [3]. *Бесконечное множество основных пар тиановых треугольников с общей площадью A^2 и со сторонами x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 получаются из формул*

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=\frac{cd(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)^2|c^4-4d^4|}{\Delta}\\
y_1&=\frac{a^2cd(a^4+4a^2b^2+20b^4)|c^4-4d^4|}{\Delta}\\
z_1&=\frac{2b^2cd(5a^4+4a^2b^2+4b^4)|c^4-4d^4|}{\Delta}\\
A&=\frac{2abcd|a^4-4b^4||c^4-4d^4|}{\Delta}\\
x_2&=\frac{ab(c^2+2d^2)(c^2-2d^2)^2|a^4-4b^4|}{\Delta}\\
y_2&=\frac{abc^2(c^4+4c^2d^2+20d^4)|a^4-4b^4|}{\Delta}\\
z_2&=\frac{2abd^2(5c^4+4c^2d^2+4d^4)|a^4-4b^4|}{\Delta}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{gathered}
a,b,c,d\in\mathbb{N},(a,b)=(c,d)=1\\
\Delta=(ab|a^4-4b^4|(2,c)^3,cd|c^4-4d^4|(2,a)^3)
\end{gathered}\right\} \tag{6}$$

Каждая основная пара тиановых треугольников определяется этим способом однозначно.

Наряду с указанными задачами можно привести еще примеры геометрических задач, которые приводят к диофантовым уравнениям. Например, к уравнению

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2$$

приводит задача об описании всех пифагоровых треугольников, катеты которых выражаются последовательными натуральными числами (таких треугольников имеется бесконечное множество). Все решения этого уравнения в натуральных числах x, y содержатся в последовательности $\{x_n, y_n\}$ для $n = 1, 2, ...,$ где $x_1 = 3, y_1 = 5$, а

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1, \qquad y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \quad (n = 1, 2, ...).$$

Например, $x_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 = 20,\ y_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 = 29;\ x_3 = 119,\ y_3 = 169;\ x_4 = 696,\ y_4 = 985;\ x_5 = 4059,\ y_5 = 5741.$

Рассмотрим еще одну задачу. Предположим, что длины сторон треугольника являются последовательными целыми числами $t-1, t, t+1$ и его площадь есть также целое число.

По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, приходим к равенству

$$16S^2 = 3t^2(t^2 - 4),$$

так что $3(t^2 - 4)$ есть четный квадрат. Полагая $t = 2x$, замечаем, что $4 \cdot 3(x^2 - 1)$ есть также квадрат. Следовательно, и выражение $3(x^2 - 1)$ должно быть квадратом, и так как это выражение делится на 3, то оно должно иметь вид $9y^2$. Следовательно, приходим к уравнению $x^2 - 3y^2 = 1$. Получили известное диофантово уравнение − уравнение Пелля.

Список литературы

1. Кожегельдинов С.Ш. Отыскание основных героновых треугольников // Изв. АН Респ. Казахстан. Сер. физ.-мат. − 1992. − №3. − С. 48-51.
2. Кожегельдинов С.Ш. Об основных тиановых треугольниках // Международная конференция «Современные проблемы теории чисел». Тезисы докл. Тула, 1993. − С. 82.
3. Кожегельдинов С.Ш. Пары тиановых треугольников с общей площадью // Математические заметки. – 2010. − Том 88, №5. – С. 729-734.
4. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. − М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
5. Barbeau, E.J. Pell`s equation. – New York.: Springer, 2003.