УДК 512.547

РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ГРУППЫ НИЖНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ ПОРЯДКА ≤ 6 НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Дубина О.А.,
научный руководитель доктор физ.-мат. наук Колесников С. Г.
Сибирский Федеральный университет

В докладе исследуется следующий вопрос: *какие максимальные унипотентные подгруппы группы Шевалле над полем характеристики 2 являются -группами?*

Напомним, что конечная группа G называется Q-группой (или рациональной группой), если значения всех её неприводимых комплексных характеров лежат в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Хорошо известно (см., например, [1, с. 9]) следующее утверждение, которое даёт необходимые и достаточные условия рациональности значений всех характеров группы G на фиксированном элементе из G.

Лемма 1. *Пусть $G-$ конечная группа, $g \in G$. Включение $\chi(g) \in \mathbb{Q}$ имеет место для всякого $\chi \in Irr(G)$ тогда и только тогда, когда элемент g сопряжен в G с любой своей степенью взаимно простой с $|g|$.*

Из леммы 1 вытекает следующий критерий рациональности конечной группы.

Следствие 1. *Конечная группа G является Q-группой тогда и только тогда, когда всякий её элемент g сопряжен в G с любой своей степенью взаимно простой с $|g|$.*

В связи со следствием 1 можно дать следующие определение рациональной группы, в котором условие конечности группы может быть опущено, так как определение использует только понятие сопряженности элементов.

Определение. *Периодическая группа G называется Q-группой, если любой её элемент g сопряжен в G с любой своей степенью взаимно простой с $|g|$.*

Данное определение -группы позволяет рассматривать сформулированный вначале вопрос и для бесконечных полей. В этом направлении получен следующий результат.

Теорема 1. *Группа нижних треугольных матриц порядка ≤ 6 над произвольным полем характеристики 2 является Q-группой.*

Полезной при доказательстве теоремы 1 оказалась следующая лемма, в которой даётся критерий рациональности 2-группы. Фактически, в ней указаны порождающие элементы группы автоморфизмов циклической 2-группы.

Лемма 2. *2-группа G рациональна тогда и только тогда, когда для любого $x \in G$ найдутся такие элементы $y, z \in G$, что $x^y = x^3$ и $x^z = x^{-1}$.*

Доказательство теоремы 1. 1) Пусть n=2, тогда $UT_2(K)=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in K\}$.

В этой группе все элементы неравные единице, имеют порядок 2,
$|g|=2$, $g\in UT_2(K)$, тогда $g^{-1}=g$ и $g^3=g$, из условий Леммы 2 следует, что группа рациональна.

2) Пусть n=3, тогда $UT_3(K)=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} | x, y, z\in K\}$.

Все элементы группы, неравные единице, имеют порядки ≤ 4, $|g|=4$, $g\in UT_3(K)$, тогда $g^{-1}=g^3$. Тогда из условий Леммы 2 группа $UT_3(K)$ также является вещественной.

3) Пусть n=4, тогда как и в случае n=3, все элементы будут иметь порядки≤ 4 и группа будет вещественной.

4) Пусть n=5.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & z & 1 & 0 & 0 \\ u & v & w & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 1 \end{pmatrix}; A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ dwzx & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда для $g\in UT_5(K)$, $|g|=4$. Тогда $g^{-1}=g^3$, в этом случае группа будет вещественна.

Порядок A равен 4, если хотя бы один из элементов x, z, w, d =0, в противном случае порядок будет равен 8, докажем, что произвольная матрица $A\in UT_5(K)$ сопряжена с A^3 и с A^{-1}.

Пусть теперь элементы x, z, w, d =1, а все остальные элементы равны 0 и будем рассматривать теперь сопряженную матрицу, для нее достаточно проверить только сопряжение с A^3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\exists\ B\in UT_5(K)$, которое сопрягает A и A^3.

$B^{-1}AB=A^3 \Leftrightarrow AB=BA^3$, найдем такое B:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & z & 1 & 0 & 0 \\ u & v & w & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 1 \end{pmatrix}; AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x+y & 1+z & 1 & 0 & 0 \\ y+u & z+v & 1+w & 1 & 0 \\ u+a & v+b & w+c & 1+d & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y+z+1 & z+1 & 1 & 0 & 0 \\ u+v+w+1 & v+w+1 & w+1 & 1 & 0 \\ a+b+c+d & b+c+d+1 & c+d+1 & d+1 & 1 \end{pmatrix}=BA^3.$$

Решив систему, получим три свободные переменные u, v, w. Положим u, v, w =0, тогда матрица B примет вид:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Эта матрица будет сопрягать произвольную матрицу A.

5) Пусть n=6.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\x&1&0&0&0&0\\y&z&1&0&0&0\\u&v&w&1&0&0\\a&b&c&d&1&0\\e&f&g&h&k&1\end{pmatrix};\ A^4=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\dwzx&0&0&0&1&0\\xz(wh+ck)+dk(xv+yw)&kdwz&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

В случае, когда для $g\in UT_6(K)$, $|g|=4$. Тогда $g^{-1}=g^3$, группа будет вещественна.

Порядок A равен 4, если элементы x, z, w, d, k, c, h, v, y =0, в противном случае порядок будет равен 8.

Пусть теперь элементы x, z, w, d, k, c, h, v, y =1, а все остальные элементы равны 0 и будем рассматривать сопряженную матрицу, для нее достаточно проверить только сопряжение с A^3.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\exists\, B\in UT_6(K)$, которое сопрягает A и A^3.

$B^{-1}AB=A^3 \Leftrightarrow AB=BA^3$, найдем такое B:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\x&1&0&0&0&0\\y&z&1&0&0&0\\u&v&w&1&0&0\\a&b&c&d&1&0\\e&f&g&h&k&1\end{pmatrix};AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1+x&1&0&0&0&0\\1+x+y&z+1&1&0&0&0\\x+y+u&z+v+1&w+1&1&0&0\\y+u+a&z+v+b&w+c+1&d+1&1&0\\u+a+e&v+b+f&w+c+g&d+h+1&k+1&1\end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y+z & z+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u+v+1 & v+w & w+1 & 1 & 0 & 0 \\ a+b+d & b+c+1 & c+d & d+1 & 1 & 0 \\ e+f+h+1 & f+g+k & g+h+1 & h+k & k+1 & 1 \end{pmatrix} = BA^3.
$$

Решив систему, получим свободные переменные e, f, u, y, z. Положим e, f, u, y, z=0, тогда матрица B примет вид:

$$
B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Найденная матрица будет сопрягать произвольную матрицу A.

Теорема доказана.

Литература

1. Kletzing D., Structure and representations of Q-groups. Lecture notes in mathematics, 1084. Springer, 1984.