УДК 512.54

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Черепанский А.Н., Ефимов Ф.А., Парфенов А.А.,
научный руководитель д-р. физ.-мат. наук Колесников С.Г.
Сибирский федеральный университет

В 1999 году Л. Пыбер поставил в Коуровской тетради следующий вопрос ([1], вопрос 14.74).

Пусть L(G) обозначает число фклассов сопряженных элементов конечной группы G. Верно ли, что $L(G) \leq L(G_1)...L(G_s)$, где $G_1,..., G_s$ такие силовские подгруппы G, что $|G| = |G_1|...|G_s|$.

В настоящей заметке справедливость данного неравенства устанавливается для симметрических групп S_n для всех достаточно больших n. Более точно, доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Существует такое натуральное число N, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $L(S_n) < \prod p_i$, где произведение берётся по всем простым числам не превосходящим n.*

Так как любая конечная p-группа обладает нетривиальным центром порядка $\geq p$, то для всякой силовской -подгруппы $Syl_p(G)$ конечной группы G справедливо неравенство $L(Syl_p(G)) \geq p$. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Для всех натуральных чисел $n > N$ имеет место неравенство*

$$L(S_n) \leq \prod_{p \leq n} L\left(Syl_p(S_n)\right),$$

где произведение берётся по всем простым $p \leq n$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\pi(x)$ функцию от вещественного аргумента x, равную числу простых чисел не превосходящих x. Пусть $n \geq 48$. Логарифмируя произведение $\prod_{p \leq n} p$, и используя очевидное неравенство

$$\sum_{\frac{n}{2}<p\leq n} \ln p \geq \left(\pi(n) - \pi(n/2)\right) \ln \frac{n}{2},$$

получим

$$\ln\left(\prod_{p\leq n} p\right) \geq \left(\pi(n) - \pi(n/2)\right) \ln \frac{n}{2}.$$

Покажем, что существует такая положительная константа c, что

$$\left(\pi(n) - \pi(n/2)\right) \ln \frac{n}{2} \geq nc.$$

Для этого воспользуемся неравенством Чебышева:

$$\frac{na}{\ln n} \leq \pi(n) \leq \frac{nb}{\ln n},$$

где $a = 0.921,\ b = 1.106$. Имеем,

$$\left(\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right)\right)\ln\frac{n}{2} \geq \left(\frac{an}{\ln n} - \frac{bn}{2\ln\frac{n}{2}}\right)\ln\frac{n}{2} = n\left(a - \frac{a\ln 2}{\ln n} - \frac{b}{2}\right) \geq$$

$$\geq n\left(a - \frac{a\ln 2}{\ln 48} - \frac{b}{2}\right) \geq n \cdot c,$$

где $c = 0.012$. Таким образом,

$$\ln\left(\prod_{p\leq n} p\right) \geq n \cdot c.$$

Потенцируя последнее неравенство, получим

$$\prod_{p\leq n} p \geq e^{nc}.$$

Хорошо известно, что две подстановки сопряжены S_n тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое циклическое строение. Число подстановок в S_n, имеющих различное циклическое строение, равно числу $p(n)$ решений уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, в целых числах таких, что $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Согласно [2,стр. 60] имеет место асимптотическая формула

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}},$$

иными словами,

$$\lim_{n\to+\infty} p(n) / \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}} = 1.$$

Следовательно, существует константа N_1 такая, что для всех $n > N_1$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} \leq p(n) / \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}} \leq \frac{3}{2}.$$

Далее, при c > 0

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}} / e^{cn} = 0,$$

поэтому существует константа N_2 такая, что для всех $n > N_2$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}} / e^{cn} \le \frac{2}{3}.$$

Перемножив правые части полученных неравенств, для всякого $n \ge \mathrm{N} = \max\{N_1, N_2\}$ будем иметь

$$\frac{p(n)}{e^{cn}} \le 1.$$

Значит,

$$L(S_n) = p(n) \le e^{cn} \le \prod_{p \le n} p.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп// Новосибирск, ИМ СО РАН, 1999, 134 с.

[2] М. Холл, Комбинаторика. М.: Мир, 1970, 424 с.