УДК 517.11

РЕШЁТКА GL-ЛОГИК ЗАДАВАЕМЫХ ФРЕЙМАМИ МАЛОГО ПОРЯДКА

Ильюхина Д.А.
научный руководитель к. ф.-м.н., доцент Голованов М.И.
Сибирский федеральный университет

Целью настоящего доклада является построение решетки табличных логик, определяемых фреймами из заданного списка их *p*-морфных образами и открытыми подфреймами. Используется семантическое задание логик с помощью фреймов заданной глубины и ширины.

Имеется серия табличных логик, каждая из которых задается фреймом глубины и ширины ≤3, являющихся расширением логики GL.

По результатам А.В.Чагрова, приведенным в его книге, задача аксиоматического задания логик алгоритмически неразрешима. Поэтому в работе используется семантическое задание логик с указанным значением глубины и ширины, с помощью решетки характеристических классов фреймов.

Мной были исследованы все замкнутые классы корневых фреймов глубины и ширины ≤3, их *p*-морфные образы и открытые подфреймы.

<u>Определение 1.</u> Фреймом называется пара <W,R >, где W – непустое множество, R - отношение строгого порядка на W.

<u>Определение 2.</u> Фрейм F называется корневым, если существует элемент $a\in F$ такой, что для любого элемента $b\in F$ (aRb). Элемент a называется корнем F.

<u>Определение 3.</u> Мы говорим, что фрейм F имеет глубину $n<\omega$, d(F)=n, если есть цепь из n элементов в F, и нет цепей более чем из n элементов. Если для каждого $n<\omega$, F содержит n-элементную цепь, тогда F имеет бесконечную глубину.

Модальная логика Λ - это логика глубины n, если: $\delta_n\in\Lambda$, но $\delta_{n-1}\notin\Lambda$, где $\delta_0:=\perp$, $\delta_{n+1}=p_{n+1}\vee\Box(\Box p_{n+1}\to\delta_n)$. В нашем случае глубина фреймов будет не более 3: $\delta_3=p_3\vee\Box(\Box p_3\to\delta_2)=p_3\vee\Box(\Box p_3\to p_2\vee\Box(\Box p_2\to p_1\vee\Box(\Box p_1\to\perp)))$

После глубины, представим понятие ширины фреймов. Множество точек $X\subseteq W$ называется антицепью во фрейме F=<W,R>, если $\forall$ x, y выполняется $\neg$(xRy). Другими словами X – антицепь, если отдельные элементы в X не видят друг друга.

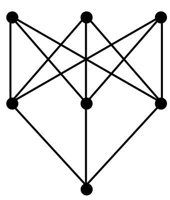
<u>Определение 4.</u> Говорим, что фрейм F имеет ширину n, если он содержит антицепь из n элементов, и нет ни одной другой антицепи большей мощности.

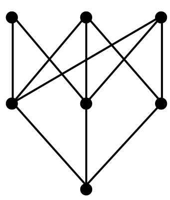
Модальная логика Λ - это логика ширины n, если: $\varphi_n\in\Lambda$, но $\varphi_{n-1}\notin\Lambda$, где $\varphi_0:=\perp$, $\varphi_n=\bigwedge_{i=1}^{n+1}\Diamond p_i\to\bigvee_{1\le i\ne j\le n+1}\Diamond(p_i\wedge p_j)$

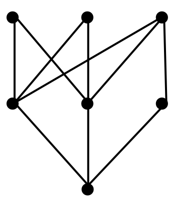
<u>Определение 5.</u> Решетка – это частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов есть наименьшая и наибольшая грань.

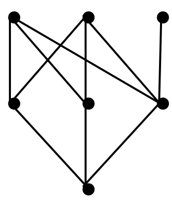
<u>Семантическое представление логик ширины и глубины ≤3</u>

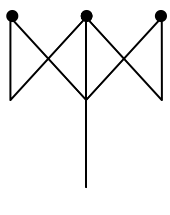
Фреймы типа (3,3) (т.е. фреймы, у которых и первый и второй слой имеет 3 элемента):

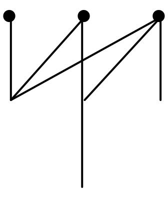

F1

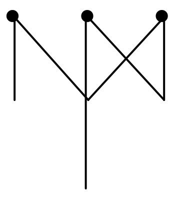

F2

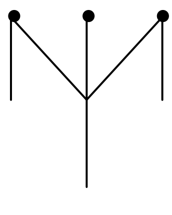

F3

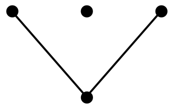
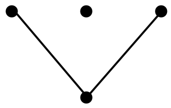
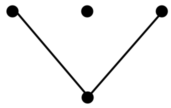
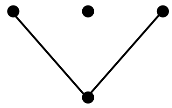

F4



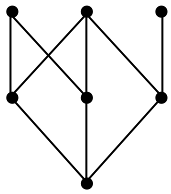
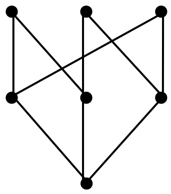
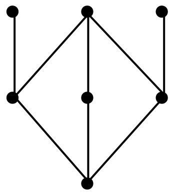
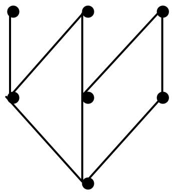




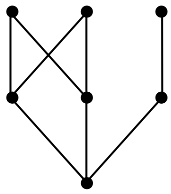
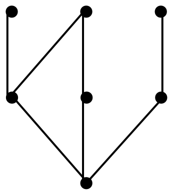
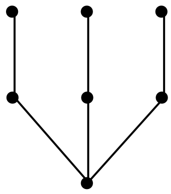


F5 F6 F7 F8

F9 F10 F11 F12

F13 F14 F15

Определение 6. Семейство фреймов будем называть замкнутым, если, вместе с каждым фреймом из этого класса, к данному классу относятся и все его открытые подфреймы и *p*-морфные образы.

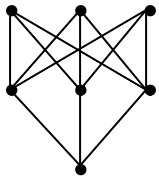
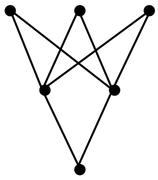
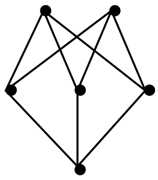
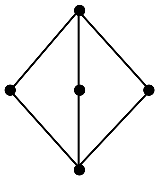
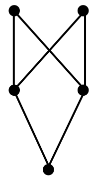
Определение 7. Отображение f фрейма $F_1:=\langle W_1;R_1\rangle$ во фрейм $F_2:=\langle W_2;R_2\rangle$ это *p*-морфизм, если: $\forall a,b\in W_1[a\ R_1\ b \Rightarrow f(a)\ R_2\ f(b)]$

$\forall a,b\in W_1[f(a)\ R_2\ f(b) \Rightarrow (\exists\ c \in W_1)[a\ R_1\ c\ \&\ f(c)=b]]$

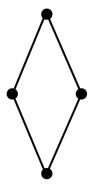
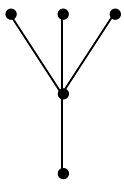
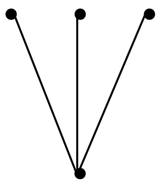
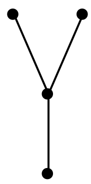
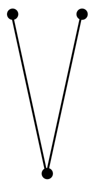
$\forall a,b\in W_1[f(b)\ R_2\ f(a) \Rightarrow (\exists\ c \in W_1)[c\ R_1\ a\ \&\ f(c)=f(b)]]$

Определение 8. Даны фреймы $F_1:=\langle W_1;\ R_1\rangle$ и $F_2:=\langle W_2;\ R_2\rangle$, фрейм F_2 – открытый подфрейм F_1, если $W_1\subseteq W_2$, $R_2\cap W_1^2 = R_1$ и еще $\forall a\in W_1$, $\forall b\in W_2$ $(a\ R_2\ b \Rightarrow b\in W_1)$.

Построение *p*-морфных образов и открытых подфреймов фрейма F1

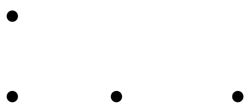
    

$F1_1$ $F1_2$ $F1_3$ $F1_4$ $F1_5$

$F1_6$ $F1_7$ $F1_8$ $F1_9$ $F1_{10}$

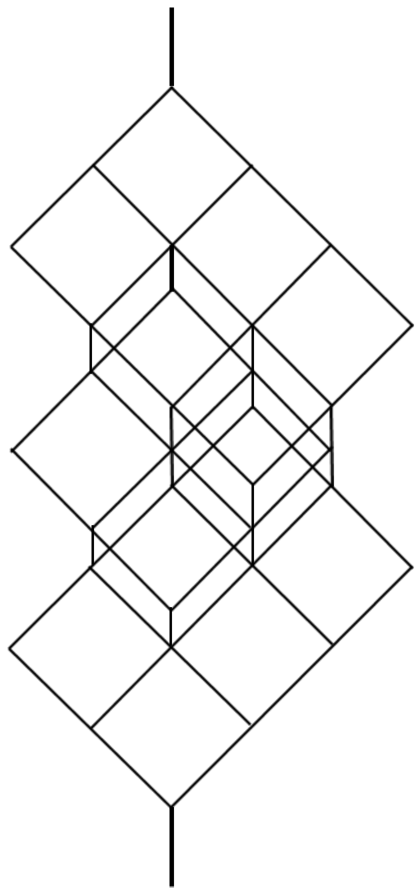


$F1_{11}$ $F1_{12}$ $F1_{13}$

Если при *p*-морфизме отображаем две точки в одну, то будем говорить, что мы их склеиваем.

Таким образом, получаем замкнутый класс, порожденный фреймом F1.

Решётка логик, задаваемых представленными фреймами, имеет следующий вид.



В данной работе построена решётка логик, задаваемых фреймами из замкнутого класса, порождённого фреймом F1. Аналогичным способом строятся и для оставшихся 14 фреймов.

Список использованных источников:

1. Rybakov, V.V. Admissibility of logical inference rules/ V.V. Rybakov - Krasnoyarsk: KSU, 1996. – 624 с.
2. Рыбаков, В.В. Модальные системы. Теоретико-модальная семантика/ В. В. Рыбаков - Красноярск: КГУ, 2003. – 23 с.
3. Chagrov, A. Modal logic/ A. Chagrov, M. Zakharyaschev – Clarendon press: Oxford, 1997. – 605 с.
4. Чагров, А.В. Алгоритмическая проблема аксиомотизации табличной нормальной модальной логики/ А.В. Чагров - Online Journal "Logical Studies" No.8, 2002. – 13 с.