УДК 512.563.6

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА РАЗЛИЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Немкова А.Е.
Научный руководитель канд. пед. наук, доц., Киргизова Елена Викторовна.
Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

Изучение логики развивает: ясность и четкость мышления; способность предельно уточнять предмет мысли; внимательность, аккуратность, обстоятельность, убедительность в суждениях; умение абстрагироваться от конкретного содержания и сосредоточиться на структуре своей мысли. Задания по алгебре логики крепко обосновались в ЕГЭ и ГИА по информатике, несмотря на то, что вызывают большие затруднения у школьников. В статье предложены несколько методов нахождения количества решений системы логических уравнений: с помощью таблиц истинности, бинарных деревьев и чисел Фибоначчи. Рассмотрим их на примере решения задач.

Задача 1: Сколько различных решений имеет система логических уравнений:

$$\begin{cases} \overline{x_1} + x_2 = 1 \\ \overline{x_2} + x_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{x_{m-1}} + x_m = 1 \end{cases}$$

Решение:

Приведенная система уравнений равносильна уравнению:

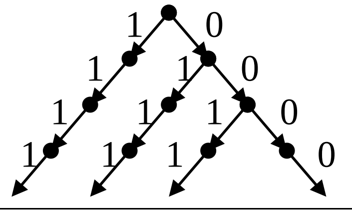
$(x_1 \rightarrow x_2)*(x_2 \rightarrow x_3)*\dots*(x_{m-1} \rightarrow x_m) = 1.$

Предположим, что x_1 – истинно, тогда из первого уравнения получаем, что x_2 также истинно, из второго - x_3=1, и так далее до x_m = 1. Значит набор (1; 1; …; 1) из m единиц является решением системы. Пусть теперь x_1=0, тогда из первого уравнения имеем x_2 =0 или x_2 =1.

Когда x_2 истинно получаем, что остальные переменные также истинны, то есть набор (0; 1; …; 1) является решением системы. При x_2=0 получаем, что x_3=0 или x_3=, и так далее. Продолжая до последней переменной, получаем, что решениями уравнения являются следующие наборы переменных (m+1 решение, в каждом решении по m значений переменных):

(1; 1; 1; …; 1)
(0; 1; 1; …; 1)
(0; 0; 1; …; 1)
(0; 0; 0; …; 1)
…
(0; 0; 0; …; 0)

Такой подход хорошо иллюстрируется с помощью построения бинарного дерева. Количество возможных решений – количество различных ветвей построенного дерева. Легко заметить, что оно равно m+1.

Переменные	Дерево	Количество решений
x_1		
x_2		3
x_3		4
…		…

В случае трудностей в рассуждениях и построении дерева решений можно искать решение с использованием **таблиц истинности**, для одного – двух уравнений.

Перепишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 \to x_2 = 1 \\ x_2 \to x_3 = 1 \\ \dots \\ x_{m-1} \to x_m = 1 \end{cases}$$

И составим таблицу истинности отдельно для одного уравнения:

x_1	x_2	$(x_1 \to x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Составим таблицу истинности для двух уравнений:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to x_2$	$x_2 \to x_3$	$(x_1 \to x_2) * (x_2 \to x_3)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Далее можно увидеть, что одно уравнение истинно в следующих трех случаях: (0; 0), (0; 1), (1; 1). Система двух уравнений истина в четырех случаях (0; 0; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 1; 1). При этом сразу видно, что существует решение, состоящее из одних нулей и еще m решений, в которых добавляется по одной единице, начиная с последней позиции до заполнения всех возможных мест. Можно предположить, что общее решение будет иметь такой же вид, но чтобы такой подход стал решением, требуется доказательство, что предположение верно.

Задача 2: Сколько различных решений имеет система логических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n = 1 \end{cases}$$

Решение:

Решая систему, любым из вышеописанных методов, для двух уравнений получим 5 различных решений: (0; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0), (1; 1; 1). Для системы из трех уравнений имеем 8 решений – (0; 1; 0; 1), (0; 1; 1; 0), (0; 1; 1; 1), (1; 0; 1; 0), (1; 0; 1; 1), (1; 1; 0; 1), (1; 1; 1; 0), (1; 1; 1; 1).

Проанализировав данную систему логических уравнений, можно сделать вывод: если первая переменная любого уравнения принимает значение 0, то вторая переменная этого же уравнения обязательно примет значение 1, в противном случае, произвольное значение 1 или 0.

Обозначим N_k – общее количество решений системы k уравнений, N_k^0, N_k^1 – количество решений этой системы, последняя переменная которых соответственно равна 0 или 1. Понятно, что $N_1^0 = 1$, $N_1^1 = 2$.

В общем виде общее количество решений системы логических уравнений запишется:

$$N_k = N_k^1 + N_k^0.$$

Для представленной системы, получаем такое рекуррентное соотношение, с начальными условиями $N_1 = 3$, $N_2 = 5$. Такому соотношению соответствуют числа Фибоначчи, то есть элементам числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, …, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

Сравнив начальные значения с последовательностью Фибоначчи, получаем, что количество различных решений равно (n+2)-му члену последовательности Фибоначчи F_{n+2}.

При n=10 получаем – $F_{12} = 144$, при n= 7, $F_9 = 34$.

Сведение задачи к числам Фибоначчи возможно только для систем логических уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n = 1 \end{cases}$$

Если начальная система не заданна в таком виде, можно преобразовать ее, с помощью логических законов. Например, система вида:

$$\begin{cases} x_1 * x_2 + \overline{x_1} * \overline{x_2} + x_2 * x_3 + \overline{x_2} * \overline{x_3} = 1 \\ x_2 * x_3 + \overline{x_2} * \overline{x_3} + x_3 * x_4 + \overline{x_3} * \overline{x_4} = 1 \\ \dots \\ x_{m-2} * x_{m-1} + \overline{x_{m-2}} * \overline{x_{m-1}} + x_{m-1} * x_m + \overline{x_{m-1}} * \overline{x_m} = 1 \end{cases}$$

при учете того, что $a * \overline{b} = a \equiv b$, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) + (x_2 \equiv x_3) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3) + (x_3 \equiv x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_{m-2} \equiv x_{m-1}) + (x_{m-1} \equiv x_m) = 1 \end{cases}$$

После введения новой переменной $y_i = (x_i \equiv x_{i+1})$ получим систему нужного вида:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ \dots \\ y_{m-2} + y_{m-1} = 1 \end{cases}$$

При определении количества решений исходной системы, необходимо учитывать зависимость переменных y_i. Если они зависимы, то исходная система будет иметь 2* F_{m-1+2} решений, а при независимых переменных 2^{m-1}* F_{m-1+2} решений.

В конце, стоит отметить, что не все предложенные методы подходят для решения задач на нахождение количества решений системы логических уравнений. При выполнении заданий такого типа, стоит применять индивидуальный подход к каждой системе.

Литература:

1. Киргизова Е.В., Немкова А.Е. Способы решения систем логических уравнений / Materiały VIII Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji «Dynamika naukowych badań - 2012» Volume 10. Pedagogiczne nauki.: Przemyśl. Nauka i studia - 112 str.
2. Логические задачи / О.Б. Богомолова – 2-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 271 с.: ил.
3. Поляков К.Ю. Системы логических уравнений / Учебно-методическая газета для учителей информатики: Информатика №14, 2011 г.