УДК 510.64

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ К4.3

Новикова Е.К.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Кияткин В.Р.
Сибирский федеральный университет

При изучении логических систем кроме постулированных правил вывода применяются допустимые правила, относительно которых логика замкнута.

Если существует алгоритм, позволяющий по любому предъявленному правилу распознать его допустимость в изучаемой логике, то такая логика называется разрешимой по допустимости. Настоящий доклад посвящен исследованию вопроса о разрешимости по допустимости расширения системы К4 пропозициональной модальной логике

$$K4.3 = K4 + \left(\bigwedge_{0\le i\le 2} \Diamond\, p_i \to \bigvee_{0\le i\ne j\le 2}\left(\Diamond\left(p_i \cap \left(p_j \cup \Diamond\, p_j\right)\right)\right)\right).$$

Напомним, что правило вывода:

$$\frac{A_1(p_1, \dots, p_n), \dots, A_m(p_1, \dots, p_n)}{B(p_1, \dots, p_n)}.$$

Называется допутимым в логике λ, если для любого набора формул $c_1, \dots, c_n$ из того , что $A_1(c_1, \dots, c_n) \in \lambda, \dots, A_m(c_1, \dots, c_n) \in \lambda$ следует, что и $B(c_1, \dots, c_n) \in \lambda$.

Модель $\mathfrak{M}_n = \langle W_n, R_n, V_n \rangle$, где $W_n -$ основное множество, $R_n -$ бинарное отношение, $V_n -$ означивание называется n–характеристической для логики λ, если V_n означивает n различных переменных и для любой формулы α от n переменных имеет место:

$$\alpha\,(p_1, \dots, p_n) \in \lambda \iff \mathfrak{M}_n \vDash \alpha\,(p_1, \dots, p_n).$$

Означивание S на шкале $\langle W_n, R_n \rangle$ модели $\mathfrak{M}_n$ называется формульным, если для $\forall p_i \in Dom(S)$существует формула α_i такая, что $S(p_i) = V_n(\alpha_i)$.

Известен критерий допустимости через n–характеристические модели:

Пусть $\mathfrak{M}_n,\ n \in N -$ множество n–характеристических моделей.

Правило r вывода:

$$\frac{A_1, \dots, A_m}{B}$$

допустимо в логике тогда и только тогда, когда для $n \in N$ и каждого формульного означивания S переменных из r имеет место :

Если $S(A_1) = W_n, \dots, S(A_m) = W_n$, то и $S(B) = W_n$.

Для того , чтобы можно было пользоваться этим критерием в логике $K4.3$ была сконструирована n–характеристическая модель $Ch_{K4.3}(n)$.

$Ch_{K4.3}(n)$ строится индукцией по l , где l номер слоя. Доказана следующая:

Теорема 1. *1) Модель $Ch_{K4.3}(n)$ является n–характеристической для логики $K4.3$.*

2) Каждый элемент этой модели формульный.

Заметим, что построенная n–характеристическая модель используется при доказательстве другого критерия через редуцированную формула правила.

В расширении $K4$ правило

$$\frac{A_1, \dots, A_m}{B}$$

эквивалентно

$$\frac{A_1\&, \dots, \&A_m}{B}$$

поэтому можно рассматривать только однопосылочные правила вида:

$$r = \frac{A(p_1, \dots, p_n)}{B(p_1, \dots, p_n)}.$$

Говорят, что правило r имеет редуцированную форму r_f, если

$$r_f = \frac{\bigvee_{j=1}^{n} \varphi_j}{\neg \lozenge p_0},$$

где

$$\varphi_j \coloneqq \bigwedge_{0 \le i \le m} p_i^{k(i,j,1)} \wedge \bigwedge_{0 \le i \le m} p_i^{k(i,j,2)}$$

$$\text{и} \quad k(i,j,1), \;\; k(i,j,2) \in \{0,1\} \;,$$

p_i − различные переменные и все переменные правила .r_f находятся среди них.

Доказано, что любое правило r может быть приведено к редуцированной форме r_f, и при этом r семантически эквивалентно r_f.

Обозначим $D(r_f) \coloneqq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ множество всех дизъюнктов в посылке r_f.

Для каждого φ_jзафиксируем обозначения:

$$\Theta_1(\varphi_j) = \{p_i | \;\; 0 \le i \le m, \;\; k(i,j,1) = 0\}$$

$$\Theta_2(\varphi_j) = \{p_i | \;\; 0 \le i \le m, \;\; k(i,j,2) = 0\}$$

Посмотрим некоторую модель $\mathfrak{M}_X = \langle X, R, V \rangle$, где

$$X \subseteq D(r_f),$$

$$R\colon \quad \forall \varphi_j, \varphi_k \in X \left(\varphi_j R \varphi_k \Leftrightarrow \left(\Theta_1(\varphi_k) \cup \Theta_2(\varphi_k) \right) \subseteq \Theta_2(\varphi_j) \right)$$

$$V: \quad V(p_i) = \{\varphi_j \mid p_i \in \Theta_1(\varphi_j)\}.$$

Доказаны следующие две леммы:

Лемма 1. *Если правило r_f имеет редуцированную форму и не является допустимым в $K4.3$, то модель $\mathfrak{M}_X$ имеет следующие свойства:*

1. *В $\mathfrak{M}_X$ имеются рефлексивные и иррефлексивные элементы;*
2. *В $\mathfrak{M}_X$ найдётся φ_j такое, что $p_0 \in \Theta_1(\varphi_j)$;*
3. *В $\mathfrak{M}_X$ есть элементы φ_j такие, что $\Theta_2(\varphi_j)=\emptyset$ и есть сгустски $C=\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ такие, что $\Theta_2(\varphi_j)=\bigcup_{i=1}^{m} \Theta_1(\varphi_j)$;*
4. *Для любого максимального сгустка C модели $\mathfrak{M}_X$, любого элемента φ_j и любого $p_i \in \Theta_2(\varphi_j) \setminus \Theta_1(\varphi_j)$ существует $\varphi_k \in C$ такое, что $p_i \in \Theta_1(\varphi_k)$;*
5. *Для любого $\varphi_j \in X$ выполняется $\varphi_j \vDash_V \varphi_j$;*
6. *Ширина шкалы модели $\mathfrak{M}_X$ не превосходит 2;*
7. *Для любой антицепи V модели $\mathfrak{M}_X$ существуют:*
   (a) $\varphi_{\mathrm{V}}^* \in \mathfrak{M}_X$ такой, что $\Theta_2(\varphi_{\mathrm{V}}^*) = \Theta_1(\varphi_{\mathrm{V}}^*) \cup (\bigcup_{\varphi \in \mathrm{V}} \Theta_2(\varphi))$,
   (b) $\varphi_{\mathrm{V}} \in \mathfrak{M}_X$ такой, что $\Theta_2(\varphi_{\mathrm{V}}) = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{V}}(\Theta_1(\varphi) \cup \Theta_2(\varphi))$.

Лемма 2.*Если для правила в редуцированной форме r_f существует подмножество $X \subseteq D(r_f)$ такое, что модель $\mathfrak{M}_X$ удовлетворяет условиям (1)-(7) из леммы 1, то r_f не допустимо в логике $K4.3$.*

Из леммы 1 и леммы 2 следует :

Теорема 2. *Правило в редуцированной форме допустимо в $K4.3$ тогда и только тогда, когда для любого подмножества $X \subseteq D(r_f)$ модель $\mathfrak{M}_X$ не удовлетворяет условиям (1)-(4).*

Поскольку правила r и r_f допустимы или недопустимы одновременно, то доказанная теорема дает алгоритмический критерий допустимости для любого правила r в логике $K4.3$.