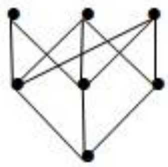
УДК 517.11

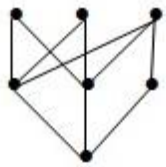
АКСИОМАТИЗАЦИЯ ЛОГИК, СОДЕРЖАЩИХСЯ В НЕКОТОРОЙ РЕШЕТКЕ МАЛОГО ПОРЯДКА

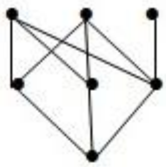
Позднякова А.С.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Голованов М. И.
Сибирский федеральный университет

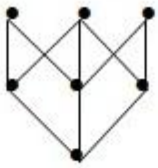
В ходе работы были исследованы замкнутые классы, порожденные корневыми фреймами, имеющими в первом и втором слое по три точки, глубины и ширины не больше трех с их p-морфными образами. Эти фреймы выглядят следующим образом:

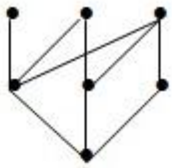

F1

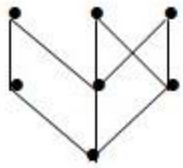

F2

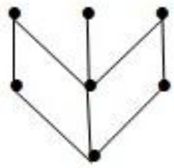

F3

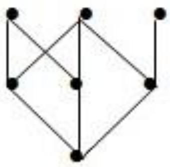

F4

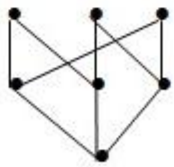

F5

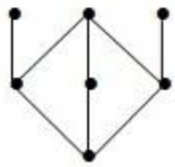

F6

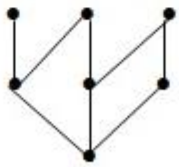

F7

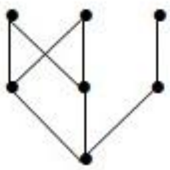

F8

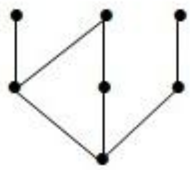

F9


F10


F11


F12


F13


F14


F15

Некоторые необходимые определения определения:

<u>Определение 1:</u> Фреймом (шкалой) называется пара $<W,R>$, где W — непустое множество, R —бинарное отношение, определенное на W, т. е. $R \subseteq W2$.

<u>Определение 2:</u> Отображение f фрейма $F1:=\langle W1; R1\rangle$ во фрейм, $F2:=\langle W2; R2\rangle$ это p-морфизм, если:

$\forall a,b \in W1\ [a\ R1\ b \Rightarrow f(a)\ R2\ f(b)]$

$\forall a,b \in W1\ [f(a)\ R2\ f(b) \Rightarrow (\exists\ c \in W1)\ [a\ R1c\ \ \&\ f(c)=b]]$

$\forall a,b \in W1\ [f(b)\ R2\ f(a) \Rightarrow (\exists\ c \in W1)\ [c\ R1a\ \ \&\ f(c)=f(b)]]$.

Определение 3: Семейство фреймов будем называть замкнутым, если, вместе с каждым фреймом из этого класса, к данному классу относятся и все его открытые подфреймы и p-морфные образы.

Определение 4: Фрейм будем называть корневым, если во фрейме есть такой элемент x, что $F=\{y \mid x \leq y\}$.

Определение 5: Алгебра $A=\langle A, \wedge, \vee \rangle$ с двумя двуместными операциями называется решеткой при условии выполнения равенств:

$x \wedge x=x$, $x \vee x=x$

$x \wedge y=y \wedge x$, $x \vee y=y \vee x$

$x \wedge (y \wedge z)=(x \wedge y)z$, $x \vee (y \vee z)=(x \vee y)z$

$(x \wedge y) \vee y=y$, $(x \vee y) \wedge y=y$

Определение 6: Для определения логики с конечной шириной используются следующие формулы для $1 \leq n$:

$$\mathbf{W_n} \coloneqq \bigvee_{0 \leq i \neq j \leq n} \Diamond \left(\mathbf{p_i} \wedge \left(\mathbf{p_j} \vee \Diamond \ \mathbf{p_j}\right)\right)$$

Распишем несколько первых формул для малых значений ширины, которые нам потребуются:

$w_0= \Diamond p_0$

$w_1=\Diamond p_0 \wedge \Diamond p_1 \rightarrow [\Diamond(p_0 \wedge \Diamond p_1) \vee \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_0)]$

$w_2=\Diamond p_0 \wedge \Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \rightarrow [\Diamond(p_0 \wedge \Diamond p_1) \vee \Diamond(p_0 \wedge \Diamond p_2) \vee \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_0) \vee \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_2) \vee \Diamond(p_2 \wedge \Diamond p_0) \vee \Diamond(p_2 \wedge \Diamond p_1)]$

$w_3=$
$\Diamond p_0 \wedge \Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Diamond p_3 \rightarrow [\Diamond(p_0 \wedge \Diamond p_1) \vee \Diamond(p_0 \wedge \Diamond p_2) \vee \Diamond(p_0 \wedge \Diamond p_3) \vee \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_0) \vee \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_2) \vee \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_3)$
$\vee \Diamond(p_2 \wedge \Diamond p_0) \vee \Diamond(p_2 \wedge \Diamond p_1) \vee \Diamond(p_2 \wedge \Diamond p_3) \vee \Diamond(p_3 \wedge \Diamond p_0) \vee \Diamond(p_3 \wedge \Diamond p_1) \vee \Diamond(p_3 \wedge \Diamond p_2)]$.

Определение 7: Мы говорим, что у модальной логики над K4 существует глубина n, если $\text{б}n \in \lambda$, но $\text{б}n\text{-}1 \in \lambda$

$\text{б}_0=\perp$

$\text{б}_{n+1}=p_{n+1} \vee \Box(\Box\ p_{n+1} \rightarrow \text{б}_n)$.

Распишем несколько первых формул для малых значений глубины, которые нам потребуются:

$\text{б}_1= p_1 \vee \Box(\Box p_1 \rightarrow \perp)$

$\text{б}_2= p_2 \vee \Box(\Box p_2 \rightarrow \text{б}_1)= p_2 \vee \Box(\Box p_2 \rightarrow p_1 \vee \Box(\Box p_1 \rightarrow \perp))$

$\text{б}_3=p_3 \vee \Box(\Box p_3 \rightarrow \text{б}_2)= p_3 \vee \Box(\Box p_3 \rightarrow [p_2 \vee \Box(\Box p_2 \rightarrow p_1 \vee \Box(\Box p_1 \rightarrow \perp))])$

Ниже описываются фреймы F4 и F14, с их всевозможными *p*-морфные образы. Описывать открытые фреймы не требуется, так как в рассматриваемом классе каждый открытый фрейм можно получить как p-морфный образ.

Сначала рассматривается фрейм F4 (см. рис. 1). Данный фрейм имеет 12 p-морфных образов. Каждый из этих 12 фреймов порождает свой замкнутый класс. Далее, этими фреймами порождаем решетку, используя операции объединения и пересечения. Берутся минимальные замкнутые классы, в которых есть замкнутые подклассы. Совокупности замкнутых подклассов составляют решетку. Построение решетки начинается с классов, которые порождаются одним фреймом.

Подклассы, замкнутого класса порожденного F4, составляют следующую решетку (см. рис 2):

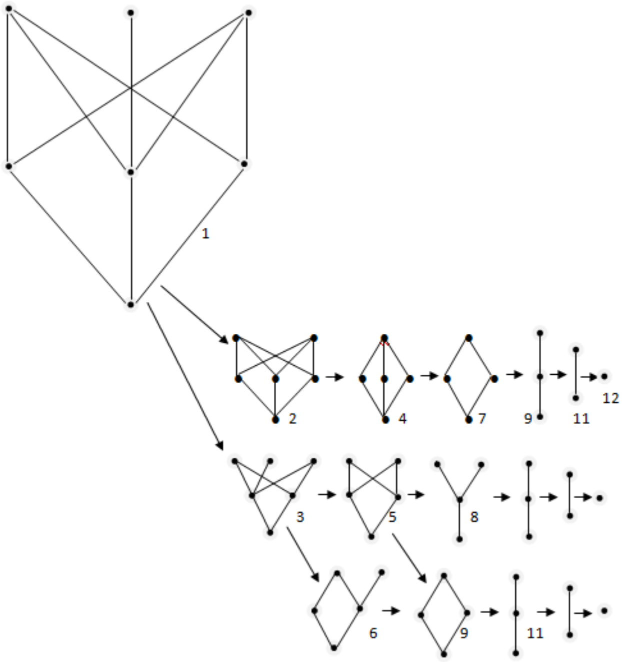


Рис. 1

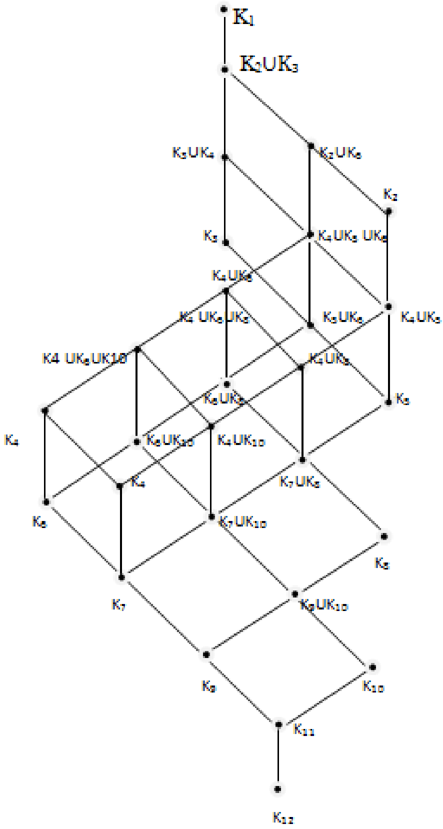


Рис.2

Далее рассматривается фрейм F14 (см. рис. 3). Этот фрейм имеет 12 р-морфных образов.

Подклассы, замкнутого класса порожденного F14, составляют следующую решетку (см. рис 4):

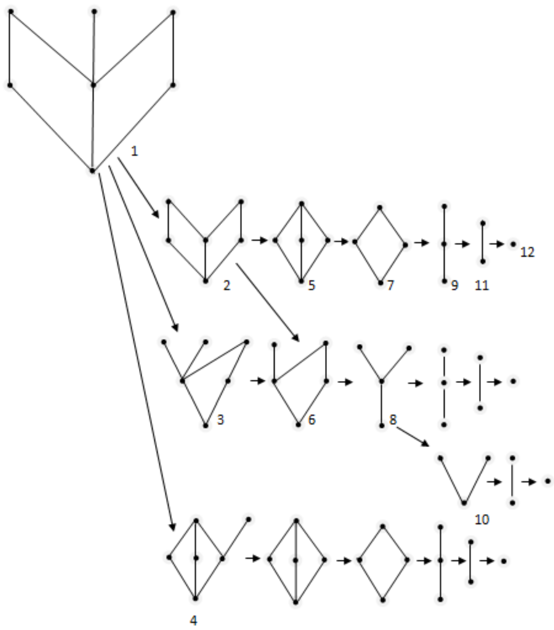


Рис. 3

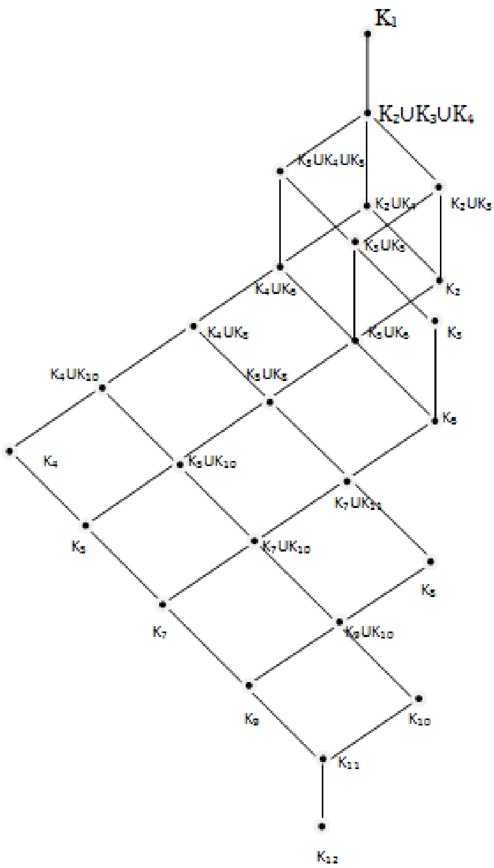


Рис.4