УДК 519.6

ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВЕКТОРА МЕТОДОМ СОПРЯЖЁННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

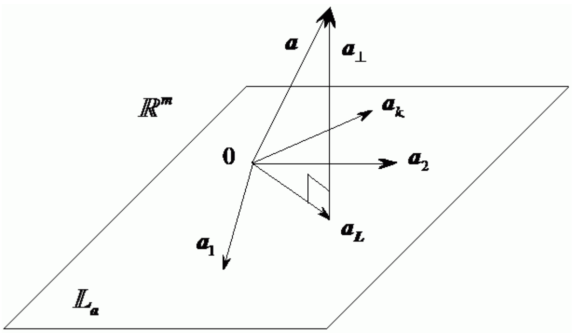
Пригодина И.В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доц. Киреев И.В.

Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики

Постановка задачи: *построить в* m*-мерном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^m$ *для вектора* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ *ортогональное дополнение* $\boldsymbol{a}_\perp$ *к линейной оболочке* $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$ *векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^m$. Далее через $m_{\boldsymbol{a}} < m$ обозначаем размерность подпространства $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$, а для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ из $\mathbb{R}^m$ используем обозначение $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$; напомним, что $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}} = \{\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^m$.



Общепринятый алгоритм решения поставленной задачи заключается в том, что вначале строится ортогональная проекция $\boldsymbol{a}_{\mathbb{L}}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на подпространство $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$, для чего, как правило, решают систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой является матрицей Грамма системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^m$. По найденной проекции $\boldsymbol{a}_{\mathbb{L}}$ ортогональное дополнение легко определяется $\boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{L}}$ (см. рисунок). Однако, если образующие подпространство $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$ векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ являются линейно зависимыми, то матрица Грамма для них оказывается вырожденной, что приводит к дополнительным сложностям при численном решении возникающей системы уравнений не только прямыми, но и итерационными методами [1]. Среди последних значительное внимание в последние годы уделяется методам сопряжённых направлений, которые и лежат в основе предлагаемого ниже алгоритма решения поставленной задачи.

Обозначим через $\mathbf{P}$ - симметричный неотрицательно определённый оператор из $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$, определяемый следующими соотношениями:

$$\mathbf{P} = \sum_i \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}_i: \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{P}\boldsymbol{c} = \sum_i \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{L}_{\boldsymbol{a}} \subset \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Тогда процесс построения приближений $\boldsymbol{a}_\perp^i$ к ортогональному дополнению $\boldsymbol{a}_\perp$ можно представить в виде утверждения:

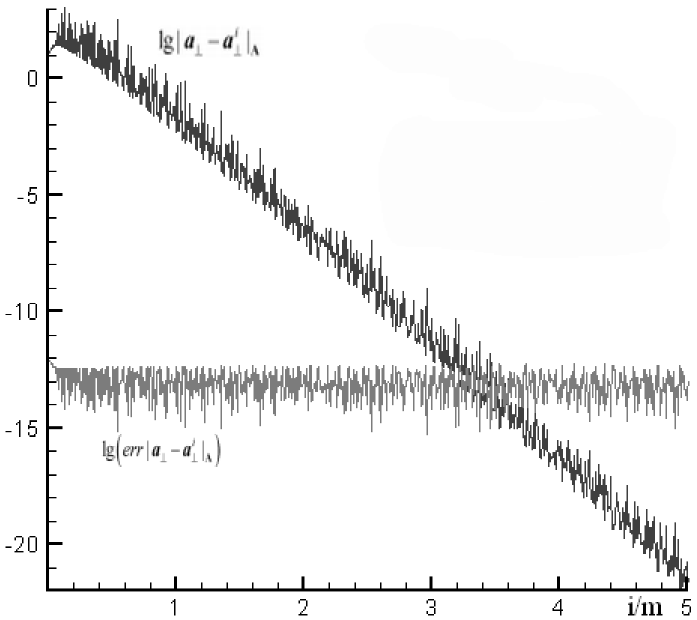
Теорема. *Пусть задано начальное приближение* $\boldsymbol{a}_\perp^0$ *к вектору* $\boldsymbol{a}_\perp$*, так что* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_\perp^0 \in \mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$. *Находим* $\boldsymbol{d}^0 = \mathbf{P}\boldsymbol{a}_\perp^0$*, где оператор* $\mathbf{P}$ *определен выше. Полагая* $\boldsymbol{c}^1 = \boldsymbol{d}^0$ *для каждого* $i \geq 1$ *вычисляем:*

$$\alpha_i = \frac{\langle \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{a}_\perp^{i-1} \rangle}{\langle \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{c}^i \rangle}, \ \boldsymbol{a}_\perp^i = \boldsymbol{a}_\perp^{i-1} - \alpha_i \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{d}^i = \mathbf{P}\boldsymbol{a}_\perp^i, \ \beta_i = \frac{\langle \boldsymbol{d}^i, \boldsymbol{c}^i \rangle}{\langle \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{c}^i \rangle}, \ \boldsymbol{c}^{i+1} = \boldsymbol{d}^i - \beta_i \boldsymbol{c}^i. \tag{2}$$

Тогда при отсутствии погрешностей округления ортогональное дополнение $\boldsymbol{a}_\perp$ *к подпространству* $\mathbb{L}_{\boldsymbol{a}}$ *будет получено не более чем за* $m_{\boldsymbol{a}}$ *шагов, т.е.* $\boldsymbol{a}_\perp^i$ *будет совпадать с* $\boldsymbol{a}_\perp$ *начиная с некоторого* $i \le m_{\boldsymbol{a}}$.

Опуская доказательство утверждения отметим, что оно является следствием из теоремы 104.1 из [2] об ортогонализации степенной последовательности для симметричного оператора $\mathbf{P}$, определённого в (1). Безусловным достоинством алгоритма (2) является его невырожденность для любой системы ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$.

Предложенный алгоритм может быть применён для построения ненулевого собственного вектора симметричной вырожденной матрицы $\mathbf{A}$, отвечающего её нулевому собственному значению. Для этого в соотношениях (2) вместо $\mathbf{P}$ должна фигурировать заданная матрица $\mathbf{A}$, что позволяет получить за конечное число итераций ненулевой собственный вектор $\boldsymbol{a}_\perp$, отвечающий нулевому собственному значению, если только вектор $\boldsymbol{a}_\perp^0$ не ортогонален $\boldsymbol{a}_\perp$. Была разработана программа на языке C++, реализующая описанный метод. Результат его работы приведён на следующем рисунке для матрицы $\mathbf{A}$, у которой максимальное отношение ненулевых собственных значений было равно $\sim 10^7$. Здесь ось абсцисс связана с относительным номером итерации i/m, а по оси ординат отложены десятичный логарифм энергетической нормы погрешности $0.5\lg\langle \mathbf{A}\left(\boldsymbol{a}_\perp - \boldsymbol{a}_\perp^i\right), \boldsymbol{a}_\perp - \boldsymbol{a}_\perp^i\rangle$ и $\lg\left(\mathrm{err}\,|\,\boldsymbol{a}_\perp - \boldsymbol{a}_\perp^i\,|_{\mathbf{A}}\right)$ - десятичный логарифм абсолютной погрешности вычисления энергетической нормы на компьютере; все вычисления проводились с относительной погрешностью $\sim 10^{-14}$. Из рисунка видно, что предельная точность вычислений достигается за число итераций не превосходящее $4m$. Из сказанного следует, что сформулированная теорема может быть применена и для построения ненулевого решения однородной системы уравнений.



Список использованных источников

1. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов; – М.: Наука,. 1984. – 320 с.

2. Воеводин В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин; – М.: Наука,. 1980. – 400 с.