

**ВЫПУКЛЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ТЕЛ M3, M8, M20**

**Сенашов А.В.,**

**научный руководитель д-р физ.-мат. наук Тимофеенко А.В.**

*Сибирский федеральный университет*

Найдены все выпуклые соединения многогранников Залгаллера M3, M8, M20. Кроме 9 таких соединений, имеющих в классификационной теореме о выпуклых правильногранниках (А.М. Гурин, В.А. Залгаллер, А.В. Тимофеенко, 2008-2011), получены еще четыре многогранника, некоторые грани которых составлены из правильных многоугольников так, что некоторые вершины этих многоугольников попадают внутрь ребра многогранника. Теорема, описывающая все выпуклые многогранники с такими вершинами, пока не создана. Следующая теорема является ее частью.

Рис. 1)

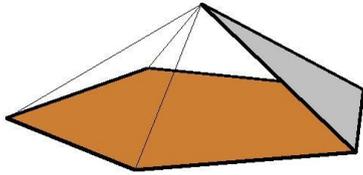
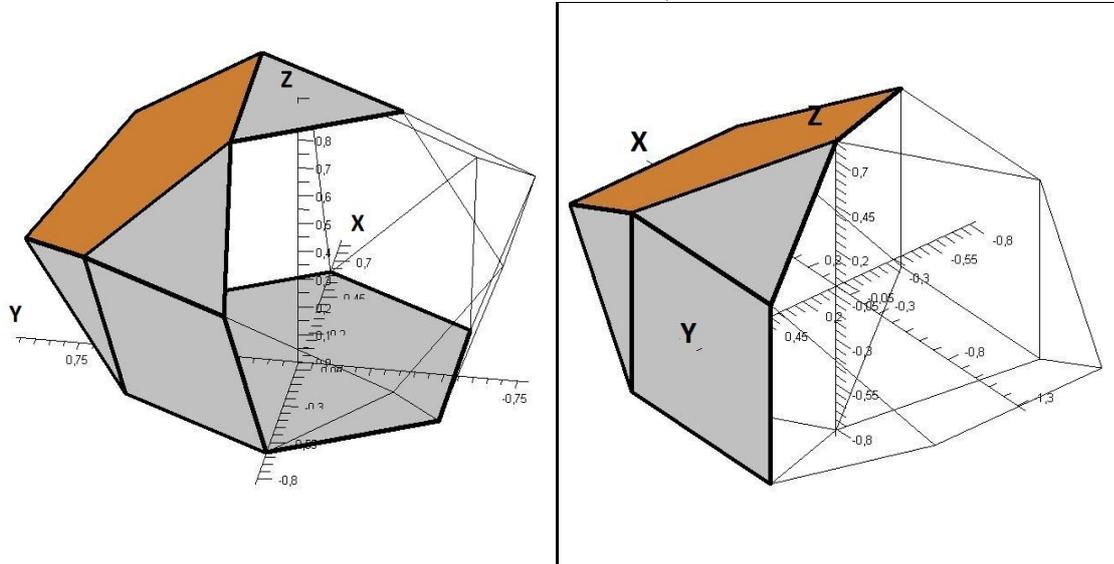


Рис. 2 и 3)



**Теорема.** Выпуклый многогранник составлен из тел M3, M8, M20 тогда и только тогда, когда он является одним из следующих соединений:

$$S1=M3+M3, S2=M3+M8, S3=M3+M20;$$

$$S4=S2+M3, S5=S2+M3', S6=S2+M3'', S7=S3+M3;$$

$$S8=S4+M3, S9=M3+S7;$$

$$S10=M3+S6.$$

Доказательство:

Известны фундаментальные вершины и группы поворотов тел M3, M8, M20:(А. В. Тимофеенко, “Несоставные многогранники, отличные от тел Платона и Архимеда”, *Фундамент. и прикл. матем.*, 14:2 (2008), 179–205).Находим фундаментальные грани,

закрашенные на рисунках.

Будем рассматривать новые соединения по следующему алгоритму. Многогранники соединяем по фундаментальным граням так, что один многогранник остаётся неподвижным, а на второй действуем такими движениями, которые не отображают его на себя, но соединяемая грань переходит в себя и не переворачивается. Из получившихся соединений отбросим рассмотренные ранее и невыпуклые многогранники. Найдем у новых многогранников фундаментальные грани и повторим шаг алгоритма для более длинного списка тел. В случае если на новом шаге больше не получено тел, то завершаем работу алгоритма. Теорема доказана.

Для работы алгоритма из доказательства потребовались следующие свойства многогранников теоремы, которые представляют самостоятельный интерес.

Двусоставные:

S1) Двойная пирамида имеет больше осей поворотов, чем пирамида МЗ. К оси вращения, проходящей через вершину, соединяющую 5 треугольников, добавляются оси поворотов, переставляющих такие вершины. Они проходят через вершины, соединяющие 4 треугольника и противоположенные им ребра. Через середины других ребер оси провести нельзя, так как на одном конце такого ребра находится 4 треугольника, а на другом 5. Аналогично, через середины оставшихся граней не могут проходить оси вращения, так как около 2 вершин находится 4 треугольника, а около третьей 5. Получена диэдральная группа поворотов, порождающим которой соответствуют матрицы:

$$\begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} & \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} & \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом фундаментальные вершины такие же, как у МЗ:  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{8-\sqrt{5}}}{14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6+\sqrt{5}}}{14} \end{pmatrix}.$

S2) Грань, лежащую в первой координатной четверти (рис. 8), соединим с основанием пирамиды МЗ. У полученной фигуры нет осей поворотов, так как добавляется единственная вершина, соединяющая 2 ромба и 3 треугольника.

S3) У полученной фигуры нет осей поворотов, так как добавляется единственная вершина, соединяющая 2 ромба и 3 треугольника. Однако возможна симметрия относительно плоскости YZ ее матрица:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Трёхсоставные:

S4) Присоединим МЗ к грани, лежащей во второй координатной четверти. Существует единственная ось поворота, проходящая по оси Oz, так как присоединённые фигуры МЗ должны меняться местами, как и пятиугольники. Группа поворотов имеет порядок 2.

S5) Присоединим МЗ к грани, лежащей в третьей координатной четверти. Существует единственная ось поворота, проходящая по оси Oy, так как присоединённые две фигуры МЗ должны переходить в МЗ, а пятиугольник в пятиугольник.

S6) Присоединим МЗ к грани, лежащей в четвертой координатной четверти. Существует единственная ось поворота, проходящая по оси Ox, так как присоединённые две фигуры МЗ должны переходить в МЗ, а пятиугольник в

пятиугольник.

S7) Присоединим M3 к грани, лежащей так, что возможна симметрия относительно плоскости  $y + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$ . Ее матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вершина, в которой касаются два M3, попадает в ребро, соединяющее вершины M3. Эти вершины соединяют 5 треугольников. Данное ребро длины 2 теперь принадлежит двум трапециям, образованным из ромба и треугольника (трех треугольников). Оси поворотов отсутствуют, так как существует единственная фиктивная вершина, и через неё не проходит ось поворотов, совмещающих шестиугольник с собой. Фундаментальными вершинами являются все вершины лежащие по одну сторону от плоскости  $y + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$  включая вершины принадлежащие плоскости.

S8) Присоединим M3 к грани, лежащей в третьей координатной четверти. Ось поворота отсутствует, так как существует единственный пятиугольник и его ось поворота не проходит через единственную фиктивную вершину.

Фундаментальные координаты S8:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}-1} \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}-1} \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{5}-1} \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0.5 * \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}) \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}-1} \end{pmatrix}.$$

S9) Присоединим M3 к пятиугольной грани. Оказалось, что каждые две из трёх присоединённых пирамид M3 имеют по общей вершине. В многограннике S9 только они и будут фиктивными. Вершины попадают в общее ребро длины 2 треугольника и трапеции. Группа поворотов этой фигуры такая же, как и у M20.

Фундаментальные вершины имеют вид (длина стороны равна  $\sqrt{5} - 1$ ):

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} (\sqrt{5}-1) \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

S10) Присоединим M3 к пятиугольной грани. Получено тело, содержащее две фиктивные вершины, лежащие на оси Oz, они находятся на ребрах, соединяющих две трапеции. Образующие группы поворотов такие же, как и у M3.

Фундаментальные координаты имеют следующие значения:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{5}-1} \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0.5 * \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}) \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}-1} \end{pmatrix}.$$

У всех соединений M8 также возможна симметрия относительно плоскости XZ.

Ее матрица имеет вид:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

В работе были найдены все выпуклые соединения M3, M8, M20. Среди полученных выпуклых соединений обнаружены новые тела S7, S8, S9, S10 с фиктивными вершинами. Для них были построены алгебраические модели.