

О порождаемости тремя инволюциями группы $SL_6(\mathbb{Z})$

Тимофеевко И. А.

ivan.timofeenko@gmail.com

Пусть $GL_n(\mathbb{Z})$ — группа обратимых $(n \times n)$ -матриц над кольцом целых чисел \mathbb{Z} , $SL_n(\mathbb{Z})$ — ее подгруппа матриц с определителем равным 1, $PGL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ — соответственно их фактор-группы по подгруппам скалярных матриц.

Группу G будем называть $(2, 2, 2)$ -порожденной ($(2 \times 2, 2)$ -порожденной), если она порождается тремя инволюциями (соответственно тремя инволюциями, две из которых перестановочны).

Для групп SL_n , PSL_n , GL_n , PGL_n над кольцом целых чисел ответы на вопросы об их $(2, 2, 2)$ и $(2 \times 2, 2)$ -порождаемости, а также на вопрос о минимальном числе порождающих инволюций, произведение которых равно 1 $i(G)$, известен, исключая лишь группы SL_6 и SL_{10} . Результаты собраны в таблицу.

G	$(2, 2, 2)$	$(2 \times 2, 2)$	$i(G)$
SL_2	—	—	—
PSL_2	—	—	—
GL_2	+	—	6
PGL_2	+	+	5
$SL_n, PSL_n, GL_n, PGL_n, n = 3, 4$	+	—	6
$SL_n, n \geq 5, n \neq 6, 10$	+	+	5
SL_6	?	—	?
SL_{10}	?	?	?
$PSL_n, GL_n, PGL_n, n \geq 5$	+	+	5

Теорема. *Группа $SL_6(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел \mathbb{Z} порождается тремя следующими инволюциями:*

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$