УДК 517.9

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**Даржаа М.А.,**
**научный руководитель канд. физ.-мат. наук Фроленков И. В.**
***Сибирский Федеральный Университет***

В данной работе исследуется одномерное нагруженное параболическое уравнение типа Бюргерса специального вида с данными Коши. Получены достаточные условия существования решения задачи в классах гладких ограниченных функций.

В пространстве $E_1$ возьмем $r$ различных точек $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = a(t)u_{xx} + b\big(t,x,u(t,x),\omega(t)\big)u_x + f\big(t,x,u(t,x),\omega(t)\big), \qquad (*)$$

$$u(0,x) = u_0(x).$$

Через $\omega(t) = \left(u(t,\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\right)$, $j = \overline{0,p}$, $k = \overline{1,r}$ обозначена вектор-функция, компоненты которой являются следами указанного вида функции $u(t,x)$ и ее производных по $x$ до порядка $p$.

**Определение 1**. Через $Z_x^p([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу

$$C_{t,x}^{1,p}\big(G_{[0,t^*]}\big) = \left\{u(t,x) \middle| \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C\big(G_{[0,t^*]}\big), j = \overline{0,p}\right\},$$

ограниченных при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение $(*)$:

$$\sum_{j=0}^{p} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right| \le C.$$

**Определение 2**. Под классическим решением рассматриваемой задачи в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать функцию $u(t,x) \in Z_x^p([0,t^*])$, удовлетворяющую уравнению $(*)$ задачи Коши в G[0,t*].

Здесь $0 < t^* \le T$ – некоторая фиксированная постоянная. Если $t^*$ зависит от констант, ограничивающих входные данные, и $t^* \le T$, то будем говорить, что $u(t,x)$ является решением рассматриваемой задачи в малом временном интервале (или просто решение «в малом»). Если $t^*$ фиксировано, и $t^* = T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, будем говорить, что $u(t,x)$ является решением рассматриваемой задачи во всем временном интервале (или будем использовать термин «глобальная разрешимость»).

Предположим, что выполняются следующие условия.

**Условие 1.** Функции $b$, $f$, $u_0$ действительнозначные функции, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. $\forall t_1 \in [0,T]$, $\forall u(t,x) \in Z_x^p([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$, непрерывны и обладают непрерывными производными. Функция $a(t) > a_0 > 0$ – непрерывная ограниченная функция на отрезке $[0, T]$. Функция $u_0(x)$ имеет все непрерывные производные входящие в соотношение ниже и удовлетворяет ему

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left|\frac{d^j}{dx^j} u_0(x)\right| \le C.$$

**Условие 2.** Введем некоторые обозначения

$$U_j(0) = \sup_{x\in E_1} \left|\frac{d^j}{dx^j} u_0(x)\right|;$$

$$U_j(t) = \sup_{x\in E_1} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t,x)\right|;$$

$$U(0) = \sum_{j=0}^{p+2} U_j(0);\;\; U(t) = \sum_{j=0}^{p+2} U_j(t).$$

Пусть $\forall t_1 \in (0, T]$, $\forall t \in [0, t_1]$ справедливы следующие оценки:

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} b(t, x, u(t,x), \omega(t))\right| \le P_{\gamma_1}(U(t)),$$

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f(t, x, u(t,x), \omega(t))\right| \le P_{\gamma_2}(U(t)),$$

здесь $\gamma_1$, $\gamma_2 \ge 0$ – некоторые фиксированные целые числа,

$$P_\zeta(y) = \tilde{C}\big(1 + y + y^2 + \cdots + y^\zeta\big),$$

$\tilde{C} \ge 0$ – постоянная, не зависящая от функции $u(t,x)$ и ее производных.

**Теорема.** Пусть условия 1 и 2 выполняются при $\gamma_1 \ge 0$, $0 \le \gamma_2 \le 1$, тогда существует константа $t^*$, $0 \le t^* \le T$, зависящая от постоянных $a_0$, $\tilde{C}$ из условия 1 и соотношений из условия 2, такая, что классическое решение $u(t,x)$ задачи существует в классе $Z_x^p([0, t^*])$.

Для доказательства существования решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом слабой аппроксимации. Расщепим исходную задачу на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $(t - \frac{\tau}{3})$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах. Получим систему

$$u_t^\tau(t,x) = 3a(t) u_{xx}^\tau(t,x),\, n\tau < t \le \left(n + \tfrac{1}{3}\right)\tau;$$

$$u_t^\tau(t,x) = 3b\left(t - \tfrac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{3}\right)\right) u_x^\tau(t,x),\, \left(n + \tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n + \tfrac{2}{3}\right)\tau;$$

$$u_t^\tau(t,x) = 3f\left(t - \tfrac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{3}\right)\right),\, \left(n + \tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau;$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x).$$

На первом дробном шаге мы получаем оценки в силу принципа максимума для параболического уравнения. На втором дробном шаге рассматривается задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка. На третьем дробном шаге решается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Существует такая постоянная $t^* \in (0,T]$, зависящая от констант, ограничивающих входные данные, и не зависящая от τ, что при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ получаем равномерную по τ оценку.

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x)\right| \le C,\, k = \overline{0,4}$$

Из полученных оценок следует равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^j u^\tau}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^j u^\tau}{\partial x^j}, \qquad j = \overline{0,p},$$

которой достаточно для равностепенной непрерывности в $G_{[0,t^*]}$ множеств функций $\{u^\tau\}$, $\{u_x^\tau\}$, $\{u_{xx}^\tau\}$, $\{\frac{\partial^3 u^\tau}{\partial x^3}\}$, $\{\frac{\partial^4 u^\tau}{\partial x^4}\}$.

По теореме Арцела, существует последовательность $u^{\tau_k}$, сходящаяся в $G_{[0,t^*]}$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно к некоторой функции $u(t,x)$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации, функция $u(t,x) = \lim_{k\to\infty} u^{\tau_k}(t,x)$, принадлежащая классу

$$\mathrm{C}_{t,x}^{1,p}\left(G_{[0,t^*]}\right) = \left\{u(t,x) \middle| \, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t,x) \in C\left(G_{[0,t^*]}\right), j = 0,1,\dots,p+2\right\},$$

является решением прямой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №12-01-31033).

**Список литературы:**


1. Белов Ю. Я., Фроленков И. В. О существования решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши// Неклассические уравнения математической физики, сб. науч. статей, Отв. ред. А. И. Кожанов, Изд. Института мат., Новосибирск, 2012, С. 262-279.
2. Белов Ю. Я, Коршун К. В. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса // J. Sib. Fed. University. Math. Phys. 2012. V.5, N 4. P. 497-506.