УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Копылова В.Г.,

научный руководитель д. физ.-мат. наук, профессор Белов Ю.Я.

Сибирский федеральный университет

В работе решена задача идентификации функции источника одномерной системы двух уравнений в частных производных второго порядка, одно из которых является параболическим, а второе эллиптическим. Рассмотрена система уравнений, полученная из исходной системы, в которой в эллиптическое уравнение добавлена производная по времени, содержащая малый параметр $\varepsilon > 0$. Исследованы задача Коши и вторая краевая задача. Изучению случая для первой краевой задачи посвящена работа [1]. Обратные задачи для эволюционных систем составного типа изучены в работах [2-5].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|\ 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ рассматривается задача определения функций $(u^\varepsilon(t,x), v^\varepsilon(t,x), g_1^\varepsilon(t), g_2^\varepsilon(t))$ удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(t,x) + a_{11}(t)u^\varepsilon(t,x) + a_{12}v^\varepsilon(t,x) = \mu_1 u_{xx}^\varepsilon(t,x) + g_1^\varepsilon(t)f(t,x), \\ \varepsilon v_t^\varepsilon(t,x) + a_{21}(t)u^\varepsilon(t,x) + a_{22}v^\varepsilon(t,x) = \mu_2 v_{xx}^\varepsilon(t,x) + g_2^\varepsilon(t)F(t,x), \end{cases} \quad (1)$$

$\varepsilon - const, \varepsilon \in (0,1]$,

начальным условиям

$$u^\varepsilon(0,x) = u_0(x),\ \ v^\varepsilon(0,x) = v_0(x), \quad (2)$$

и условиям переопределения

$$u^\varepsilon(t,x^0) = \varphi_1(t),\ \ \varphi_1 \in C^2[0,T], \quad (3)$$

$$v^\varepsilon(t,x^0) = \varphi_2(t),\ \ \varphi_2 \in C^2[0,T], \quad (4)$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$- заданные функции на $[0,T]$.

В (1) коэффициенты $\alpha_{ij}(t),\ i = 1,2,\ j = 1,2,$ заданы на отрезке $[0,T]$, функции $f(t,x),\ F(t,x)$ заданы в $G_{[0,T]}, \mu_1, \mu_2 = const > 0$.

Пусть выполняются соотношения

$$|f(t,x^0)| \ge \delta_1 > 0,\ t \in [0,T],\ \delta_1 > 0 - const., \quad (5)$$

$$|F(t,x^0)| \ge \delta_2 > 0,\ t \in [0,T],\ \delta_2 > 0 - const. \quad (6)$$

Предположим выполнение следующих условий:

- условия согласования

$$u_0(x^0) = \varphi_1(0); \quad (7)$$

$$v_0(x^0) = \varphi_2(0); \quad (8)$$

- функции $\alpha_{ij}(t), i = 1,2,\ j = 1,2$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0,T]$:

$$\alpha_{ij}(t) \in C^2[0,T],\ i = 1,2,\ j = 1,2; \quad (9)$$

- матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

порождает симметрическую и коэрцитивную билинейную форму: $a(t,\xi,\chi) = (A(t)\xi,\chi)$:

$$a(t,\xi,\chi) = a(t,\chi,\xi), \qquad \forall \xi,\chi \in E_2,$$

$$a(t,\xi,\xi) \geq \kappa|\xi|^2 \quad \forall\xi = (\xi_1,\xi_2) \in E_2,\ t \in [0,T],\ \kappa > 0 - const. \qquad (10)$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения и удовлетворяют им:

$$|a_{ij}(t)| \leq C,\ i = 1,2,\ j = 1,2, \qquad (11)$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} v_0(x)\right| \leq C,\ k = 0,\dots,p+6, \qquad (12)$$

$$|\varphi(t)| + |\varphi'(t)| + |\varphi''(t)| \leq C, (t,x) \in G_{[0,T]}. \qquad (13)$$

Предполагаем, что C - постоянная больше единицы, постоянная $p \geq 6$ - нечетное число.

Используя метод слабой аппроксимации и следуя работе [4] можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (5)-(13). Тогда существует и единственно решение* $(u^\varepsilon(t,x), v^\varepsilon(t,x), g_1^\varepsilon(t), g_2^\varepsilon(t))$ *задачи (1)-(4) в классе* $Z(t)$

$$Z(T) = \{u^\varepsilon(t,x), v^\varepsilon(t,x), g_1^\varepsilon(t), g_2^\varepsilon(t) |\ u^\varepsilon(t,x) \ \in C_{t,x}^{1,p+4}(G_{[0,T]}),$$
$$v^\varepsilon(t,x) \ \in C_{t,x}^{1,p+4}(G_{[0,T]}),\ g_1^\varepsilon(t) \in C([0,T]),\ g_2^\varepsilon(t) \in C([0,T])\}, \qquad (14)$$

удовлетворяющее соотношениям

$$\sum_{k=o}^{p+4}\left(\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\varepsilon(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} v^\varepsilon(t,x)\right|\right) + ||g_1^\varepsilon(t)||_{C^1[0,T]} + ||g_2^\varepsilon(t)||_{C^1[0,T]} +$$
$$+ \left|\frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon(t,x)\right| \ + \left|\frac{\partial}{\partial t} v^\varepsilon(t,x)\right| \leq C(\varepsilon), \quad (t,x) \in G_{[0,T]}. \qquad (15)$$

Предположение 1. Предположим, что входные данные $u_0(x), v_0(x), f(t,x)$, $F(t,x)$ - периодические по переменной x функции с периодом $2l > 0$, точка $x^0 \in (0,l)$, и ряды

$$u_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i cos\frac{i\pi}{l}x,$$
$$v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i cos\frac{i\pi}{l}x,$$
$$f(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t) cos\frac{i\pi}{l}x,$$
$$F(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t) cos\frac{i\pi}{l}x,$$

сходятся равномерно вместе со своими производными по x до порядка $p+4$ соответственно в $[0,l]$ и $\bar{Q}_T = [0,l] \times [0,T]$.

Доказана теорема.

Теорема 2. *При выполнении предположения 1 и условий теоремы 1 при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *компоненты* $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ *решения* $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon)$ *задачи (1)-(4)*

являются периодическими функциями по переменной x с периодом $2l$ и удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^{2m+1}u^{\varepsilon}(t,0)}{\partial x^{2m+1}} = \frac{\partial^{2m+1}u^{\varepsilon}(t,l)}{\partial x^{2m+1}} = \frac{\partial^{2m+1}v^{\varepsilon}(t,0)}{\partial x^{2m+1}} = \frac{\partial^{2m+1}u^{\varepsilon}(t,l)}{\partial x^{2m+1}} = 0,\ \ m = 0,1,\dots,\frac{p}{2}+1. \quad (16)$$

Замечание 1. Из (15) и системы (1) следует, что производные $\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^{\varepsilon}(t,x)$, $\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^k}{\partial x^k}v^{\varepsilon}(t,x), 2m+k \le p+4$, существуют и непрерывны в $G_{[0,T]}$ и

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^{\varepsilon}(t,x) + \frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^k}{\partial x^k}v^{\varepsilon}(t,x) \le C(\varepsilon),\ (t,x) \in G_{[0,T]}. \quad (17)$$

В результате работы были получены равномерные по $\varepsilon \in (0,1]$ оценки

$$||u_j^{\varepsilon}||_{C(\bar{Q}_T)} + ||v_j^{\varepsilon}||_{C(\bar{Q}_T)} \le C,\ j = 0,\dots,p+2, \quad (18)$$

$$||u_j^{\varepsilon\prime}||_{C(\bar{Q}_T)} + ||v_j^{\varepsilon\prime}||_{C(\bar{Q}_T)} \le C,\ j = 0,\dots,p. \quad (19)$$

В силу неравенств (18), (19) множества $u_j^{\varepsilon}, v_j^{\varepsilon}, j = 0,\dots,p+2$, удовлетворяют условиям теоремы Арцела. Следовательно, существует подпоследовательность (u^{μ}, v^{μ}) последовательности векторов $(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})$ и вектор-функция (u, v) такие, что при $\mu \to 0$

$$u_j^{\mu} \to u_j,\ v_j^{\mu} \to v_j,\ \text{в}\ C(\bar{Q}_T),\ \ j = 0,\dots,p. \quad (20)$$

Переходя к пределу при $\mu \to 0$ в системе (1) (при $\varepsilon = \mu$) и учитывая при этом оценку (19) (при $j = 0$), в силу (20) получим, что вектор (u, v) удовлетворяет в $\bar{Q}_T$ системе уравнений

$$\begin{cases} u_t(t,x) + a_{11}(t)u(t,x) + a_{12}v(t,x) = \mu_1 u_{xx}(t,x) + g_1(t)f(t,x), \\ \qquad a_{21}(t)u(t,x) + a_{22}v(t,x) = \mu_2 v_{xx}(t,x) + g_2(t)F(t,x), \end{cases} \quad (21)$$

начальным условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ x \in [0,l], \quad (22)$$

краевым условиям

$$u_x(t,0) = v_x(t,0) = u_x(t,l) = v_x(t,l) = 0, \quad (23)$$

и условиям переопределения

$$u(t,x^0) = \varphi_1(t), \quad (24)$$
$$v(t,x^0) = \varphi_2(t). \quad (25)$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (3)-(13), (16), (17) и предположение 1. Тогда решение $(u,\ v,\ g_1, g_2)$ задачи (21)-(25) существует и единственно в классе $X(T)$, где*

$$X(T) = \{u(t,x), v(t,x), g_1(t), g_2(t) | u(t,x)\ \in C_{t,x}^{1,p}(\bar{Q}_T),$$
$$v(t,x)\ \in C_{t,x}^{1,p}(\bar{Q}_T), g_1(t) \in C([0,T]), g_2(t) \in C([0,T])\}. \quad (26)$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда решение $(u,\ v,\ g_1, g_2)$ задачи*

$$\begin{cases} u_t(t,x) + a_{11}(t)u(t,x) + a_{12}v(t,x) = \mu_1 u_{xx}(t,x) + g_1(t)f(t,x), \\ \qquad\qquad a_{21}(t)u(t,x) + a_{22}v(t,x) = \mu_2 v_{xx}(t,x) + g_2(t)F(t,x), \end{cases}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in [0,l],$$

$$u(t,x^0) = \varphi_1(t), \qquad v(t,x^0) = \varphi_2(t),$$

существует и единственно в классе $X(T)$

$$X(T) = \{u(t,x), v(t,x), g_1(t), g_2(t) | u(t,x) \ \in C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,T]}),$$
$$v(t,x) \ \in C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,T]}),\ g_1(t) \in C([0,T]), g_2(t) \in C([0,T])\}.$$

При $\varepsilon \to 0$

$$u_j^\varepsilon \to u_j,\ v_j^\varepsilon \to v_j, \quad \textit{равномерно в}\ \ G_{[0,T]},\ \ j = 0, \dots, p,$$
$$g_1^\varepsilon \to g_1,\ g_2^\varepsilon \to g_2, \quad \textit{равномерно в}\ \ C([0,T]).$$
$$|u^\varepsilon(t,x) - \ u(t,x)| \le \varepsilon^{\frac{1}{2}}C, \qquad (t,x) \in G_{[0,T]},$$
$$\max_{[0,T]} |g_1^\varepsilon(t) - \ g_1(t)| \le \varepsilon^{\frac{1}{2}}C.$$

Список литературы:

1. Belov Yu.Ya., Kopylova V.G. On some identification problem for source function to one semievolutionary system // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 20(2012), no.5-6, p. 723-743.
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // New York, Marcel Dekkar, Inc., 1999.
3. Белов Ю.Я. О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика, 2010, Т.3, С. 487-499.
4. Вячеславова П.Ю., Сорокин Р.В. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика, 2009, Т.2., С.288-297.
5. Сорокин Р.В., Шипина Т.Н. О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа // Вычислительные технологии, 2003, С.139-146.
6. Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации // Красноярск: КрасГУ, 1990.
7. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул // Москва: Наука, 1974.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики // Новосибирск: Наука, 1967.