УДК 517.9

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В МНОГОМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Кригер Е.Н.
научные руководители: д-р физ.-мат. наук Белов Ю. Я., канд. физ.-мат. наук Фроленков И. В.
Сибирский федеральный университет

В работе рассмотрена задача идентификации функции источника специального вида в n-мерном параболическом уравнении с данными Коши. Ищется неизвестный коэффициент, зависящий от временной и всех пространственных переменных, в предположении, что он имеет специальный вид. Используя набор условий переопределения, обратная задача сводится к прямой для нагруженного параболического уравнения, разрешимость которой исследуется с использованием метода слабой аппроксимации [1]. Доказаны теоремы существования и единственности решения исходной задачи в классах гладких, ограниченных функций.

Ранее в работе [2] исследована задача идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении, в [3] получены оценки решения задачи в $G_{[0,+\infty)}$.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \le t \le T,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_{x_k x_k}(t,x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k}(t,x) + f(t,x) \cdot \lambda(t,x),\ t \in (0,T),\ x \in R^n, \quad (1)$$

с начальным условием $u(0,x) = u_0(x),\ x \in R^n.$ (2)

Коэффициенты $b_k(t) \ge b_0 > 0$, $c_k(t)$ – вещественнозначные, непрерывные и ограниченные на $[0,T]$ функции. Наряду с функцией $u(t,x)$ нужно определить также функцию, относительно которой известна априорная информация о её виде

$$\lambda(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t, x_k), \text{ где } \lambda_k(t,x_k),\ k = 1, \dots, n, \text{ – неизвестные функции.} \quad (3)$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t, a_{k-1}^1, x_k, a_{k+1}^2) = \varphi_k(t, x_k),\ k = 1,2,\dots,n, \quad (4)$$

где векторы $a_k^1, a_k^2, k = 1,2,\dots,n,$ имеют следующий вид:

$$a_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ a_k^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),\ a_k^2 = (\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n),\ \alpha_k = const,\ k = 1,2,\dots,n.$$

Считаем выполненными условия согласования:

$$u_0(a_{k-1}^1, x_k, a_{k+1}^2) = \varphi_k(0, x_k),\ k = 1,2,\dots,n,\ \ \varphi_1(t,\alpha_1) = \varphi_2(t,\alpha_2) = \dots = \varphi_n(t,\alpha_n), \quad (5)$$

и условия на функцию $f(t,x)$:

$$\left| f(t, a_{k-1}^1, x_k, a_{k+1}^2) \right| \ge \delta_k > 0,\ \delta_k = const,\ k = 1,2,\dots,n. \quad (6)$$

Будем использовать обозначение: $D^s v(x) = \dfrac{\partial^{|s|} v(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_n^{s_n}}$, где $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ – мультииндекс, $s_r \ge 0$ – целые, $r = 1,2,\dots,n, |s| = s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

Относительно функций $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\varphi_k(t,x_k)$, $k = 1,2,\dots,n$, определенных в $G_{[0,T]}$, R^n, $[0,T] \times R^1$ соответственно, предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (7), и удовлетворяют ему.

$$\left|D^s f(t,x)\right| + \left|D^s u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x_k^j}\varphi_k(t,x_k)\right| \le C,$$
$$s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,\ldots,6,\ r=1,\ldots,n,\ j=0,1,\ldots,6,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Используя условия переопределения, получим выражение на неизвестный коэффициент в следующем виде

$$\lambda(t,x) = g(t,x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{k=1,k\ne i}^{n} b_k(t) u_{x_k x_k}(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2) + \sum\limits_{k=1,k\ne i}^{n} c_k(t) u_{x_k}(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2)}{f(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2)}, \tag{8}$$

где функция $g(t,x)$ является известной:

$$g(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_k(t,x_k) - b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,x_k) - c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_k(t,x_k)}{f(t,a_{k-1}^1,x_k,a_{k+1}^2)} -$$
$$-(n-1)\cdot \frac{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,\alpha_1) - \sum\limits_{k=1}^{n}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,\alpha_k) + c_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_k(t,\alpha_k)\right)}{f(t,a_0)}.$$

Подставим выражение (8) в уравнение (1) и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_{x_k x_k}(t,x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k}(t,x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t,x)}{f(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2)} \times$$
$$\times\left(\sum_{k=1,k\ne i}^{n} b_k(t) u_{x_k x_k}(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2) + \sum_{k=1,k\ne i}^{n} c_k(t) u_{x_k}(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2)\right) + f(t,x)\cdot g(t,x), \tag{9}$$

с начальным условием (2).

Для доказательства существования решения прямой задачи (9), (2) используем метод слабой аппроксимации [1] (далее МСА). Расщепим уравнение (9) на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$ в следах неизвестной функции.

$$u_t^\tau = 3\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k(t) u^\tau_{x_k x_k}(t,x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u^\tau_{x_k}(t,x)\right),\ j\tau < t \le \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau;$$
$$u_t^\tau = 3\cdot\sum_{i=1}^{n} \frac{f(t,x)}{f(t,a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2)}\cdot\left(\sum_{k=1,k\ne i}^{n} b_k(t) u^\tau_{x_k x_k}\left(t-\frac{\tau}{3},a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1,k\ne i}^{n} c_k(t) u^\tau_{x_k}\left(t-\frac{\tau}{3},a_{i-1}^1,x_i,a_{i+1}^2\right)\right),\ \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau; \tag{10}$$
$$u_t^\tau = 3\cdot g(t,x)\cdot f(t,x),\ \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < t \le (j+1)\tau,$$
$$u^\tau(0,x) = u_0(x),\ \ j=0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Для решения $u^\tau(t,x)$ расщепленной задачи (10) доказаны равномерные по τ оценки:

$$\left|D^s u^\tau(t,x)\right| \le C,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,\ldots,6,\ r=1,\ldots,n,\ (t,x)\in G_{[0,T]},$$
$$\left|D^s u_t^\tau(t,x)\right| \le C,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,\ldots,4,\ r=1,\ldots,n,\ (t,x)\in G_{[0,T]}. \tag{11}$$

Оценки (11) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности $u^{\tau}(t,x)$ решений расщепленной задачи (10) сходится вместе с производными $D^s u^{\tau}(t,x),\ \ s=(s_1,\ldots,s_n), s_r=0,1,\ldots,4, r=1,\ldots,n,$ к функции $u(t,x)\in C_{t,x}^{0,4}\left(G_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости МСА [1] является решением задачи (9), (2), причем $u(t,x)\in C_{t,x}^{1,4}\left(G_{[0,T]}\right)$, где

$$C_{t,x}^{p,q}\left(G_{[0,T]}\right)=\left\{u(t,x)\left|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}, D^s u\in C\left(G_{[0,T]}\right), m=0,1,\ldots,p, s=(s_1,\ldots,s_n), s_r=0,1,\ldots,q, r=1,\ldots,n\right.\right\}.$$

При этом справедливы следующие оценки

$$\left|D^s u(t,x)\right|\le C,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_r=0,1,\ldots,4,\ r=1,\ldots,n.$$

Докажем, что пара функций $u(t,x), \lambda(t,x)$ является решением исходной обратной задачи (1) – (4). В уравнении (9) последовательно полагаем $x_k=\alpha_k, k=1,2,\ldots,n.$

$$u_t\left(t,x_1,a_2^2\right)-\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x_1)=b_1(t)\cdot\left(u_{x_1x_1}\left(t,x_1,a_2^2\right)-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi_1(t,x_1)\right)+$$
$$+c_1(t)\cdot\left(u_{x_1}\left(t,x_1,a_2^2\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(t,x_1)\right)+(n-1)\cdot\frac{f(t,x_1,a_2^2)}{f(t,a_0)}\times$$
$$\times\left(b_1(t)u_{x_1x_1}(t,a_0)-b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi_1(t,\alpha_1)+c_1(t)u_{x_1}(t,a_0)-c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(t,\alpha_1)\right)+$$
$$+(n-2)\cdot\frac{f(t,x_1,a_2^2)}{f(t,a_0)}\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}\left[b_k(t)u_{x_kx_k}(t,a_0)-b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{n}\left[c_k(t)u_{x_k}(t,a_0)-c_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]\right),$$

…

$$u_t\left(t,a_{n-1}^1,x_n\right)-\frac{\partial}{\partial t}\varphi_n(t,x_n)=b_n(t)\cdot\left(u_{x_nx_n}\left(t,a_{n-1}^1,x_n\right)-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\varphi_n(t,x_n)\right)+$$
$$+c_n(t)\cdot\left(u_{x_n}\left(t,a_{n-1}^1,x_n\right)-\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_n(t,x_n)\right)+(n-1)\cdot\frac{f(t,a_{n-1}^1,x_n)}{f(t,a_0)}\times$$
$$\times\left(b_n(t)u_{x_nx_n}(t,a_0)-b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\varphi_n(t,\alpha_n)+c_n(t)u_{x_n}(t,a_0)-c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_n(t,\alpha_n)\right)+$$
$$+(n-2)\cdot\frac{f(t,a_{n-1}^1,x_n)}{f(t,a_0)}\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}\left[b_k(t)u_{x_kx_k}(t,a_0)-b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{n}\left[c_k(t)u_{x_k}(t,a_0)-c_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k}\varphi_k(t,\alpha_k)\right]\right).$$

Введем обозначения: $\psi_k(t,x_k)=u\left(t,a_{k-1}^1,x_k,a_{k+1}^2\right)-\varphi_k(t,x_k),\ k=1,2,\ldots,n.$ (12)

Получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,x_1)=b_1(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi_1(t,x_1)+c_1(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,x_1)+\\
&+(n-1)\cdot\frac{f(t,x_1,a_2^2)}{f(t,a_0)}\cdot\left(b_1(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi_1(t,\alpha_1)+c_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,\alpha_1)\right)+\\
&+(n-2)\cdot\frac{f(t,x_1,a_2^2)}{f(t,a_0)}\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\psi_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k}\psi_k(t,\alpha_k)\right),\\
&\ldots\\
&\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(t,x_n)=b_n(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\psi_n(t,x_n)+c_n(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_n(t,x_n)+\\
&+(n-1)\cdot\frac{f(t,a_{n-1}^1,x_n)}{f(t,a_0)}\cdot\left(b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\psi_n(t,\alpha_n)+c_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_n(t,\alpha_n)\right)+\\
&+(n-2)\cdot\frac{f(t,a_{n-1}^1,x_n)}{f(t,a_0)}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\psi_k(t,\alpha_k)+c_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x_k}\psi_k(t,\alpha_k)\right),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

с начальными данными: $\psi_k(0,x_k)=0,\ k=1,2,\ldots,n.$ (14)

Доказана лемма.

Лемма. *Если существует решение* $\Psi=(\psi_1(t,x_1),\psi_2(t,x_2),\ldots,\psi_n(t,x_n))$ *задачи (13), (14), где функции* $\psi_k(t,x_k),\ k=1,2,\ldots,n,$ *и их производные по* x_k *до второго порядка включительно непрерывны и ограничены в* $G_{[0,T]}$, *то оно единственно.*

Решением задачи (13), (14) является вектор $\Psi=(0,0,\ldots,0)$. Согласно лемме, решение единственно. Отсюда, в силу обозначений (12), следует выполнение условия переопределения (4). Следовательно, пара функций $u(t,x),\lambda(t,x)$ является решением обратной задачи (1) – (4).

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (5) – (7). Тогда существует решение* $u(t,x),\lambda(t,x)$ *обратной задачи (1) – (4) в классе*

$$Z(T)=\left\{u(t,x),\lambda(t,x)\,\middle|\,u\in C^{1,4}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right),\lambda\in C^{0,2}_{t,x}\left(G_{[0,T]}\right)\right\},$$

удовлетворяющее соотношению $\displaystyle\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,\ldots,4,\\ r=1,\ldots,n}}\left|D^s u(t,x)\right|+\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_r=0,1,\ldots,4,\\ r=1,\ldots,n}}\left|D^s\lambda(t,x)\right|\le C.$ (15)

Единственность решения задачи (1) – (4) показывается путем доказательства равенства нулю двух предполагаемых решений. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Решение* $u(t,x),\lambda(t,x)$ *задачи (1) – (4), удовлетворяющее соотношению (15), единственно в классе* $Z(T)$.

Список литературы:

[1] Yu.Ya. Belov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht,VSP,2002.

[2] И.В. Фроленков, Е.Н. Кригер, О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2010, **3**(4), 556 – 564.

[3] Е.Н. Кригер, И.В. Фроленков, О стабилизации решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения, Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, Россия, 5 – 12 августа 2012: тезисы докладов. – Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2012, 87 – 88.