УДК 517.9

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ АНАЛОГИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Павликова Т.А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, проф. Бадуленко Л.Н.
Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

Разностные уравнения возникают на практике при исследовании многих экономических величин. Во многом теория разностных уравнений схожа с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной статье кратко представлена теория разностных уравнений, в которой прослеживается аналогия с дифференциальными уравнениями.

Прежде чем давать определение разностного уравнения, я напомню, что такое конечная разность.

Выражение

$$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t)$$

называется *конечной разностью первого порядка* функции $y(t)$, где $y(t)$ - функция действительного переменного, h - действительное число, при чем $h > 0$.

Конечные разности высших порядков определяются рекуррентным образом формулой

$$\Delta^n y(t) = \Delta(\Delta^{n-1} y(t)).$$

Аналогия в определениях разностного и обыкновенного дифференциального уравнения

Обыкновенное дифференциальное уравнение	Разностное уравнение
Дифференциальным уравнение n-порядка называется уравнение связывающее саму функцию y, аргумент x и n производных от данной функции y. $F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0$	*Разностным уравнением n-го порядка* называется функциональное уравнение связывающее саму функцию $y(t)$, аргумент t и n конечных разностей функции $y(t)$. $F(t, y(t), \Delta y(t), ..., \Delta^n y(t)) = 0$

Определение *решения* разностного уравнения совершенно совпадает с определением решения дифференциального уравнения, т.е. *решением* разностного уравнения называется всякая функция $y = y(t)$, которая, будучи подставленная в уравнение, обращает его в тождество.

Различие в определениях общего решения разностного и обыкновенного дифференциального уравнения

Обыкновенное дифференциальное уравнение	Разностное уравнение

Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0$ называется функция $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящая от аргумента *x* и *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, которая будучи подставленная в уравнение обращает его в тождество.	*Дискретным решением разностного уравнения* $F(t, y(t), \Delta y(t), ..., \Delta^n y(t)) = 0$, соответствующим точке $t_0 \in Z_+$, называется такая последовательность чисел $y_0, y_1, .., y_k, ..$, что $F(t_0 + k, y_k, y_{k+1}, .., y_{k+n}) = 0$ для $k = 0,1,2,...$

Аналогия в методах решения простейших разностных и дифференциальных уравнений первого порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение	Разностное уравнение
1. $y'(x) = f(x)$ *Общее решение:* $y(x) = C + \int_{x_0}^{x} f(x)dx$	1. $y(t+1) = y(t) + f(t)$ *Общее решение:* $y(t) = C + \sum_{k=t_0}^{t-1} f(k), \quad C = y(t_0)$
2. $y' = p(x)y$ *Общее решение:* $y(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$	2. $y(t+1) = p(t)y(t), p(t) \neq 0$ *Общее решение:* $y(t) = C \cdot \prod_{k=t_0}^{t-1} p(k)$
3. $y' = p(x)y + f(x)$ *Общее решение:* $y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} (C + \int_{x_0}^{x} f(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau} dt)$	3. $y(t+1) = p(t)y(t) + f(t), p(t) \neq 0$ *Общее решение:* $y(t) = \prod_{k=t_0}^{t-1} p(k)(C + \sum_{k=t_0}^{t-1} f(k)(\prod_{m=t_0}^{k} p(m))^{-1})$

Аналогия в изучении линейных однородных разностных и дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Обыкновенное дифференциальное уравнение	Разностное уравнение
Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + ... + f_1 \cdot y' + f_0 y = 0$ где $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ - функции переменной *x*. *Общее решение:* $y_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j$ *Характеристическое уравнение:* $k^n + f_{n-1}k^{n-1} + ... + f_1 k + f_0 = 0$ *Решение:* 1. Если $k_1, k_2, .., k_n \in R, \ k_1 \neq k_2 \neq .. \neq k_n$, то общее решение имеет вид:	*Линейным однородным разностным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида $z(t+n) + a_1 z(t+n-1) + ... + a_n z(t) = 0$, где $a_i \in R, \ i = 1,2,...,n, \ a_n \neq 0$ *Общее решение:* $z(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i(t)$ *Характеристическое уравнение:* $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + .. + a_n = 0$ *Решение:* 1. Если $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ - действительные и простые числа, то общее решение

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$ 2. Если $k_{1,} k_2, .., k_n \in R$, $k_{1,} = k_2 = .. = k_n$, то общее решение имеет вид: $y = e^{k_0 x}(C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1})$ 3. Если $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_m \pm i\beta_m$, то общее решение имеет вид: $y = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta_1 x + C_2 \sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}$ $(C_3 \cos\beta_2 x + C_4 \sin\beta_2 x) + \dots +$ $+ e^{\alpha_m x}(C_{n-1} \cos\beta_m x + C_n \sin\beta_m x)$	имеет вид: $z(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \lambda_i^t$ 2. Если $\lambda_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 \pm i \sin\varphi_1), \dots,$ $\lambda_k = \rho_k(\cos\varphi_k \pm i \sin\varphi_k)$, то общее решение имеет вид: $z(t) = \rho_k^t (C_1 \cos\varphi_1 t + C_2 \sin\varphi_1 t + \dots +$ $+ C_k \cos\varphi_k t + C_k \sin\varphi_k x)$

Используя аналогию теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений, можно построить теорию линейных неоднородных разностных уравнений.

В заключении можно отметить, что теория разностных уравнений во многом сходна с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому используя разностные уравнения можно не только описывать экономические величины, но и многие процессы и законы природы, которым подчиняются те или иные явления.