УДК 735.29

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СОПРЯЖЁННОЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ В ШАРОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Резникова И.А.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В. К.
Сибирский федеральный университет

1. Постановка задачи

Предположим, что функции $u_1(r,t)$, $u_2(r,t)$ определены соответственно в областях $\bar{\Omega}_1 = \{r | 0 \le r \le R_1\}$, $\bar{\Omega}_2 = \{r | R_1 \le r \le R_2\}$ и удовлетворяют уравнениям

$$u_{jt} = \chi_j \left(u_{jrr} + \frac{2}{r} u_{jr}\right) + f_j(r,t),\ t > 0,\ r \in \Omega_j. \tag{1.1}$$

Функции u_j представляют собой поля температур, f_j – заданные внутренние источники тепла; χ_j – известные положительные постоянные – коэффициенты температуропроводностей, j=1,2.

Кроме того, имеются начальные и граничные условия

$$u_1(r,0) = u_2(r,0) = 0; \tag{1.2}$$

$$u_1(R_1,t) = u_2(R_1,t), \tag{1.3}$$

$$k_1 u_{1r}(R_1,t) = k_2 u_{2r}(R_1,t), \tag{1.4}$$

$$u_2(R_2,t) = 0, \tag{1.5}$$

$$|u_1(0,t)| < \infty, \tag{1.6}$$

где k_j – коэффициенты теплопроводностей. Условие (1.3) представляет собой равенство температур, а (1.4) – равенство потоков тепла на границе раздела $r=R_1$. Известно, что $\chi_j = {k_j}/{c_j\rho_j}$, где c_j – удельные теплоёмкости, ρ_j – плотности сред.

Требуется найти функции $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\Gamma_1)$, $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$, $\Gamma_j = \{r | r = R_j\}$, удовлетворяющие уравнениям (1.1) и условиям (1.2) – (1.6).

2. Априорные оценки решения

Для функций u_j автором ранее доказано неравенство типа Фридрихса

$$\int_0^{R_1} r^2 u_1^2 dr + \int_{R_1}^{R_2} r^2 u_2^2 dr \le M_0 \left(k_1 \int_0^{R_1} r^2 u_{1r}^2 dr + k_2 \int_{R_1}^{R_2} r^2 u_{2r}^2 dr\right). \tag{2.1}$$

Введём функцию времени $E(t) = 0{,}5\left(c_1\rho_1 \int_0^{R_1} r^2 u_1^2 dr + c_2\rho_2 \int_{R_1}^{R_2} r^2 u_2^2 dr\right)$. Из (1.1) – (1.5) при помощи неравенств (2.1) и Гёльдера получаем $\forall\ t \ge 0$

$$E(t) \le e^{-2\delta t}\left(\int_0^t g(\tau) e^{\delta\tau} d\tau\right)^2, \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(R_1\sqrt{c_1\rho_1}\|f_1\| + R_2\sqrt{c_2\rho_2}\|f_2\|\right). \tag{2.2}$$

Замечание. Из неравенства (2.2) следует единственность решения задачи (1.1) – (1.6).

Из определения $E(t)$ следуют оценки ru_j в норме $L_2(\Omega_j)$

$$\|ru_j\| \le e^{-\delta t}\sqrt{\frac{2}{c_j\rho_j}} \int_0^t g(\tau) e^{\delta\tau} d\tau. \tag{2.3}$$

Предположим, что (всюду далее A_{01}, A_{02}, A_1, …, A_{13} – положительные постоянные)

$$\left(\int_{\Omega_j} f_j^2(\xi,t) d\xi\right)^{1/2} \le A_{0j} e^{-\gamma t}, \gamma > \delta. \tag{2.4}$$

Пользуясь неравенствами Гёльдера, (2.3), (2.4) и интегрированием по частям, из (1.1) – (1.5) имеем оценку для u_2:

$$|u_2| \le A_1 e^{-\frac{\delta t}{2}},\ \forall\ r \in [R_1, R_2],\ t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

Для получения оценки функции $u_1(r,t)$ можно воспользоваться представлением решения 1-ой краевой задачи в шаре Ω_1:

$$u_1(r,t) = -\chi_1 \int_0^t u_2(R_1,\tau)\Lambda(r,t-\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)d\xi d\tau, \qquad (2.6)$$

где G есть функция Грина, причём

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{R_1 r}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi r}{R_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{R_1}\right)\exp\left(-\frac{\chi_1 n^2\pi^2 t}{R_1^2}\right), \qquad (2.7)$$

$$\Lambda(r,t) = \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=R_1} = \frac{2\pi}{R_1 r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi r}{R_1}\right)\exp\left(-\frac{\chi_1 n^2\pi^2 t}{R_1^2}\right). \qquad (2.8)$$

Легко заметить, что $G(r,R_1,t) = 0$. Ряды (2.7), (2.8) быстро сходятся при больших t. При малых t быстро сходятся ряды для эквивалентных представлений G и Λ:

$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G_0(r,2nR_1+\xi,t) - G_0(r,2nR_1-\xi,t)], \qquad (2.9)$$

$G_0(r,\xi,t) = (2\sqrt{\pi\chi_1 t})^{-1}\exp\left(\left.-(r-\xi)^2\right/4\chi_1 t\right)$ – функция источника. При такой записи

$$\Lambda = \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=R_1} = \frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(r-(2n+1)R_1)\exp\left(-\frac{(r-(2n+1)R_1)^2}{4\chi_1 t}\right) +$$

$$+\frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(r-(2n-1)R_1)\exp\left(-\frac{(r-(2n-1)R_1)^2}{4\chi_1 t}\right). \qquad (2.10)$$

Вернёмся к формуле (2.6) и представим $\int_0^t = \int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^t$ при произвольном $0 < \varepsilon < t$. При $0 \le \tau \le t-\varepsilon$ имеем $t-\tau \ge \varepsilon > 0$. Значит на $[0, t-\varepsilon]$ надо пользоваться формулами (2.7), (2.8), а при $0 < t-\varepsilon \le \tau \le t$ – использовать представление (2.9), (2.10).

С помощью неравенств Гёльдера, (2.4) и (2.5), $\forall\, r \in [0; R_1]$ получаем

$$\left|\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)d\xi d\tau\right| \le \begin{cases} A_2(t-\varepsilon)\exp\left(-\dfrac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right), & \gamma = \dfrac{\chi_1\pi^2}{R_1^2} \\ A_3\left|A_4 e^{-\gamma t} - \exp\left(-\dfrac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\right|, & \gamma \ne \dfrac{\chi_1\pi^2}{R_1^2} \end{cases} \equiv h_1(t),$$

$$\left|-\chi_1\int_0^{t-\varepsilon} u_2(\tau)\Lambda(r,t-\tau)d\tau\right| \le \begin{cases} A_5(t-\varepsilon)\exp\left(-\dfrac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right), & \delta = \dfrac{2\chi_1\pi^2}{R_1^2} \\ A_6\left|A_7 e^{-\frac{\delta t}{2}} - \exp\left(-\dfrac{\chi_1\pi^2 t}{R_1^2}\right)\right|, & \delta \ne \dfrac{2\chi_1\pi^2}{R_1^2} \end{cases} \equiv h_2(t).$$

Теперь оценим $|u_1(0,t)|$. Из формул (2.9), (2.10), неравенств (2.4), (2.5), пользуясь правилом Лопиталя и считая $\varepsilon \le \left.R_1^2\right/2\chi_1$, выводим

$$\left|\int_{t-\varepsilon}^{t}\int_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(0,\xi,t-\tau)d\xi d\tau\right| \le A_8 e^{-\gamma t}, \qquad \left|-\chi_1\int_{t-\varepsilon}^{t} u_2(\tau)\Lambda(0,t-\tau)d\tau\right| \le A_9 e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

По непрерывности G $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ такое, что $\forall\, r \in [0;\ \varepsilon_1]$ справедлива оценка

$$\left|\int_{t-\varepsilon}^{t}\int_0^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)d\xi d\tau\right| \le A_8 e^{-\gamma t}.$$

По непрерывности Λ $\exists\, \varepsilon_2 > 0$, что $\forall\, r \in [0;\ \varepsilon_2]$ справедлива оценка

$$\left|-\chi_1\int_{t-\varepsilon}^{t} u_2(\tau)\Lambda(r,t-\tau)d\tau\right| \le A_9 e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

Пусть теперь $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$, тогда для $\varepsilon_3 \le r \le R_1$ из формулы (2.10) при помощи неравенств Гёльдера и (2.4) выводим

$$\left|\int\limits_{t-\varepsilon}^{t}\int\limits_{0}^{R_1} f_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)d\xi d\tau\right| \le A_{10}e^{-\gamma t}, \qquad \left|-\chi_1\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} u_2(\tau)\Lambda(r,t-\tau)d\tau\right| \le A_{11}e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

Таким образом, $\forall\, r \in [0;\ R_1],\ t \in [0; T]$ получена оценка

$$|u_1| \le h_1(t) + h_2(t) + A_{12}e^{-\gamma t} + A_{13}e^{-\frac{\delta t}{2}}, \tag{2.11}$$

$T > 0$ – произвольное число. Оценим число δ для Земли, имеем

$$\delta = \frac{1}{M_{0\,min}}\min\left(\frac{\chi_1}{k_1},\frac{\chi_2}{k_2}\right) \approx 1.08\cdot 10^{-18}/c, \tag{2.12}$$

$k_1 = 20$ Вт/м $\cdot$ °C, $k_2 = 50$ Вт/м $\cdot$ °C, $\chi_j = 2\cdot 10^{-6}$м$^2/c$, $R_1 = 2.9\cdot 10^6$м, $R_2 = 6.37\cdot 10^6$м. Таким образом, величина δ зависит от геометрии области и физических параметров контактирующих сред.

Обратимся теперь к оценкам температур (2.5) и (2.11). Они получены при условии сходимости интеграла (2.4) с постоянной δ из (2.12). Значит, при $t \to \infty$ температуры в средах стремятся к нулю. Заметим, что условие (2.4) влечёт экспоненциальное затухание интенсивности внутренних источников тепла.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.К. Андрееву за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание при выполнении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00283).

ые явления.