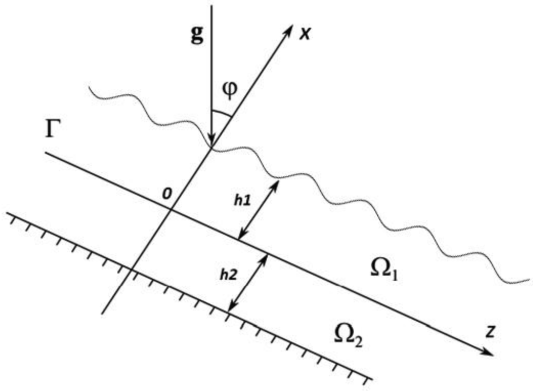
УДК 532.5.013.4

О МИКРОМАСШТАБНОМ СТАЦИОНАРНОМ ДВУХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Родионова А.В.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Бекежанова В.Б.
Сибирский федеральный университет

В настоящее время движения двух и более жидких сред, контактирующих по некоторой поверхности, изучаются не только в теории, но и имеют широкую область применения на практике, они используются во многих технологических процессах. Например, для теплостабилизации энергоустановок или охлаждения электронных устройств и систем жизнеобеспечения на МКС. Изучение конвекции в миниканалах особенно важно, поскольку наблюдается повсеместная тенденция миниатюризации электронных систем. Следует отметить, что для течений в микромасштабах и/или в условиях микрогравитации существенным оказывается влияние термокапиллярного эффекта, который в обычных условиях подавляется силами гравитации.

Рассматривается совместное стационарное течение двух вязких теплопроводных несмешивающихся несжимаемых жидкостей по наклонной плоскости с общей поверхностью раздела. Предполагается, что верхняя жидкость заполняет область $\Omega_1 = \{0 \le x \le h_1, -\infty \le z \le \infty\}$, а нижняя – область $\Omega_2 = \{-h_2 \le x \le 0, -\infty \le z \le \infty\}$. Таким образом, каждая область представляет собой бесконечный плоский слой толщиной h_i $(i = 1,2)$. Далее индекс i будет указывать на значения величин в соответствующих областях Ω_i. Предполагается, что граница раздела $\Gamma = \{x = 0, -\infty \le z \le \infty\}$ является плоской и недеформируемой. Граница при $x = -h_2$ является непроницаемой неподвижной твердой стенкой, а при $x = h_1$ – свободной границей. Слой является наклонным и образует угол φ с горизонтом. Таким образом, вектор силы тяжести $\boldsymbol{g} = (-g\cos\varphi, 0, g\sin\varphi)$. Будем рассматривать систему, в которой течение однонаправлено вдоль оси z, при этом вектор скорости имеет вид $\boldsymbol{u_i} = (0, 0, u_i(x))$.



Стационарное движение жидкости описывается уравнениями Обербека–Буссинеска:

$$(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{\rho_i}\nabla p_i = \nu_i \Delta \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{g}\beta_i T_i,$$

$$div\boldsymbol{u}_i = 0,$$

$$\boldsymbol{u_i} \cdot \nabla T_i = \chi_i \Delta T_i,$$

где $\rho_i, \beta_i, \chi_i, \nu_i$ – положительные постоянные, обозначающие среднюю плотность, коэффициенты теплового расширения, температуропроводности, кинематической вязкости, соответственно. Неизвестными являются: $\boldsymbol{u_i}$ – вектор скорости, $p_i = \widehat{p_i} - \rho_i \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}$ – модифицированное давление, T_i – температура в -том слое жидкости.

Зададим условия на границе раздела Г:

$$u_1 = u_2, \qquad T_1 = T_2, \qquad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, \qquad p_1 - p_2 + (\rho_1 - \rho_2)\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} = 0,$$

$$\rho_2 \nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \rho_1 \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -æ \frac{\partial T}{\partial z}.$$

где k_i – коэффициенты теплопроводности соответствующих жидкостей, $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$ – единичный вектор нормали к поверхности Г, направленный из Ω_2 в Ω_1. Через T обозначено общее значение температур обеих жидкостей на Г.

Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 - æT$.

Граничные условия на нижней твердой стенке задаются следующим образом:

$$u_2(-h_2) = 0, \qquad T_2(-h_2, z) = Az + T_{20}.$$

На верхней свободной границе выполнены следующие условия:

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + b_g(T_1 - T_g) = 0, \qquad p_1 = p_g - \rho_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}, \qquad \rho_1 \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -æ_g \frac{\partial T_1}{\partial z}. \qquad (x = h_1)$$

где $æ_g = -\partial\sigma/\partial T_1$ – положительная постоянная, p_g, T_g – заданные функции давления и температуры газа, b_g – коэффициент межфазного теплообмена.

Задача о движении двухслойной жидкости допускает решение типа Остроумова-Бириха:

$$\boldsymbol{u_i} = (0, 0, u_i(x)), \qquad T_i(x,z) = F_{1i}(x)z + F_i(x), \qquad p_i = p_i(x,z).$$

Подстановка данного решения в систему уравнений дает предварительное представление для искомых функций:

$$T_i(x,z) = Az + F_i(x),$$

$$p_i(x,z) = \rho_i g \beta_i (A\left(xz\cos\varphi - \frac{z^2}{2}\sin\varphi\right) + \cos\varphi \int\limits_0^x F_i(\tau)\, d\tau) + \rho_i a_i z + b_i,$$

где a_i, b_i – константы интегрирования, а функции $F_i(x)$ определяются из уравнения:

$$F_i''(x) = \frac{A}{\chi_i} u_i(x).$$

Скорости в слоях удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$u_i^{(4)} - \frac{g\beta_i A \sin\varphi}{\nu_i \chi_i} u = 0.$$

Кроме того, имеется дополнительная связь:

$$g\beta_i A\cos\varphi\, x + a_i = \nu_i u_i'' - g\beta_i \sin\varphi\, F_i.$$

В силу системы уравнений, множество решений разбивается на четыре класса: 1) $A = 0$ – отсутствие градиента температур, 2) $\boldsymbol{g} = 0$ – условия невесомости, 3) $\varphi = 0$ – горизонтальный слой, 4) $\rho_1\beta_1 = \rho_2\beta_2$ – в поле силы тяжести силы плавучести в слоях одинаковы.

Для подробного анализа полученного множества решений каждый класс должен рассматриваться в отдельности.

Так, например, для случая $\boldsymbol{g} = 0$, был получен точный вид для функций давления, скорости и температур в каждом из слоев:

$$p_i(z) = \rho_i a_i z + b_i,$$

$$u_i(x) = \frac{a_i}{2\nu_i} x^2 + C_3^i x + C_4^i,$$

$$T_i(x,z) = (M_i x + N_i)z + F_i(x),$$

где постоянные C_3^i, C_4^i, M_i, N_i, $i, j = 1,2$, определяются из граничных условий как решение системы линейных алгебраических уравнений. Функции F_i определяются из уравнения: $\chi_i F_i''(x) = (M_i x + N_i) u_i(x)$, т.е. F_i – полиномы пятого порядка по x.

Поскольку рассматривается течение со свободной границей и задано давление газа p_g вне жидкости, то из граничных условий однозначно определяются a_i и b_i.

Для системы глицерин – керосин физические данные таковы (индекс 1 – для керосина, 2 – для глицерина):

$$\mu_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \qquad \mu_2 = 14.8 \cdot 10^{-1}\ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}},$$

$$\nu_1 = 1.875 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \qquad \nu_1 = 11.746 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \qquad æ = \frac{\text{Н}}{{}^\circ\text{C} \cdot \text{м}}.$$

Характерные профили скоростей и температур при различных значениях градиента температур изображены на рисунках:

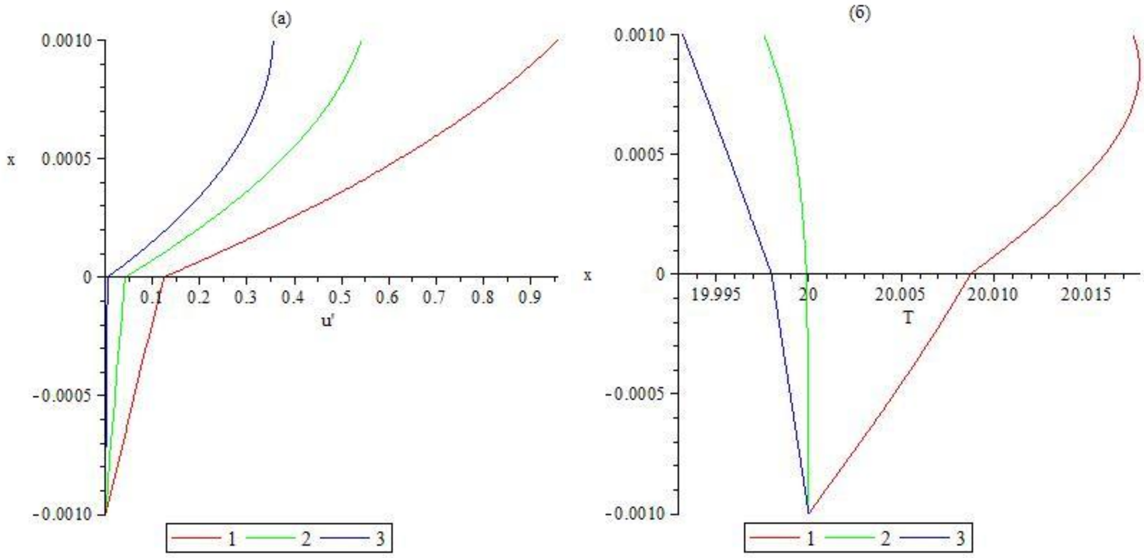


Рис. 1. Профили скоростей (а), температур (б) для $h1 = 10^{-3}, h2 = 10^{-3}$, $u' = u \cdot 10^3$; 1 – $A = 3\ {}^\circ\mathrm{C}/м$, 2 – $A = 1\ {}^\circ\mathrm{C}/м$, 3 – $A = 0.1\ {}^\circ\mathrm{C}/м$.

Таким образом, найдены точные решения, описывающие микромасштабное двухслойное течение в невесомости. Очевидно, что в данном случае решение не зависит от угла наклона плоскости, и система может быть произвольно ориентирована относительно вектора силы тяжести $\boldsymbol{g}$. Также рассмотрено влияние градиента температур и толщин слоев на структуру полученного решения.