УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ДАННЫМИ КОШИ

Романенко Г.В.
научные руководители – д-р физ.-мат. наук Белов Ю.Я.,
канд. физ.-мат. наук Фроленков И.В.
Сибирский федеральный университет

При исследовании коэффициентных обратных задач для систем составного типа с данными Коши [1,2], существуют различные способы, используя условия переопределения (дополнительная информация о решении), привести обратную задачу к прямой. Один из них состоит в том, что обратная задача сводится к неклассической прямой задаче для системы нагруженных (содержащих следы неизвестных функций и их производных) уравнений. Необходимо знать, при каких условиях эти вспомогательные задачи разрешимы, а также знать свойства их решений. Подобный подход к исследованию задач Коши для двумерных нагруженных уравнений рассматривался в [3].

В пространстве E_1 переменных x, выберем r различных точек α_k, $k=\overline{1,r}$, и s различных точек β_m, $m=\overline{1,s}$.

Рассмотрим теперь в полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T, x\in E_1\}$задачу Коши для системы нагруженных неклассических параболических уравнений

$$\begin{aligned}&u_t(t,x)=a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx}+b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x+f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),\\&v_t(t,x)=b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x+f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v),\end{aligned}\qquad(1)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\qquad v(0,x)=v_0(x),\qquad x\in E_1,\qquad(2)$$

Через

$$\overline{\varphi}_u(t)=\left(u(t,\alpha_k),\frac{\partial}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\right),\ \overline{\varphi}_v(t)=\left(v(t,\beta_m),\frac{\partial}{\partial x^j}v(t,\beta_m)\right)\ (k=\overline{1,r},\ m=\overline{1,s},\ j=0,1,...,p,)$$

обозначены вектор-функции, компоненты которой являются следами (зависящими только от переменной t) функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ соответственно, а также всех их производных по пространственной переменной x до порядка p включительно.

Определение 1. Через $Z^p([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x)$, $v(t,x)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу $C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})=\left\{\psi(t,x)\left|\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^j\psi}{\partial x^j}\in C(G_{[0,t^*]}),\quad j=\overline{0,p}\right.\right\},$$

ограниченных при $(t,x)\in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в систему (1),

$$\sum_{j=0}^{p}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,x)\right|\right)\le C.$$

Определение 2. Под классическим решением задачи (1), (2) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать пару функций $\{u(t,x),\ v(t,x)\} \in Z^p([0,t^*])$, удовлетворяющую (1), (2) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0 < t^* \le T$ – некоторая фиксированная постоянная. Если t^* зависит от входных данных, то будем говорить, что пара функций $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ является решением задачи (1), (2) в малом временном интервале (или просто решением «в малом»). Если t^* фиксировано и $t^* = T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, то будем говорить, что пара функций $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ является решением задачи (1), (2) во всем временном интервале (или будем говорить «глобальная разрешимость»).

Основной результат.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Функции a_1, b_1, b_2 действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов и функция a_1 удовлетворяет условию $a_1 \ge a_0 > 0$.

$\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall u(t,x) \in Z^p([0,t_1])$, $\forall v(t,x) \in Z^p([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$, непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение

$$\left|a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right| + \left|b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right| + \left|b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right| \le P_{\gamma_1}(S(t)).$$

Условие 2. Функции $u_0(x), v_0(x)$ действительнозначные и имеют все непрерывные производные входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right) \le C.$$

Условие 3. Функции $f_1,\ f_2$ действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Пусть $\forall t_1 \in (0,T],\ \forall t \in (0,t_1]$ справедлива следующая оценка

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|\right) \le P_{\gamma_2}(S(t)).$$

В условиях 1 и 3 под $\gamma_1,\gamma_2 \ge 0$ понимаются некоторые фиксированные целые числа, $S(t) = \sum_{j=0}^{p}\left(\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(\xi,x)\right| + \sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(\xi,x)\right|\right)$, $u(t,x), v(t,x) \in Z^p([0,t_1])$, $P_\varsigma(y) = \widetilde{C}(1 + y + \cdots + y^\varsigma)$, $\widetilde{C} > 1$ – постоянная, не зависящая от функций $u(t,x),\ v(t,x)$ и их производных.

Справедлива

Теорема (существования) Пусть выполняются условия 1 – 3.

a. Если **условия 1, 3** выполняются при $\gamma_1 \geq 0, \quad 0 \leq \gamma_2 \leq 1,$ то классическое решение $\{ u(t,x), \ v(t,x) \}$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^p([0,T])$.
b. Если **условия 1, 3** выполняются выполняется при $\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 > 1,$ то классическое решение $\{ u(t,x), \ v(t,x) \}$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^p([0,t^*])$.

Доказательство данной теоремы проводится с использованием метода расщепления на дифференциальном уровне (метод слабой аппроксимации [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31033).

Список литературы:

1. Вячеславова П.Ю., Сорокин Р.В. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журн.СФУ: математика и физика. 2009. Т.2. № 3.. С. 288-297.
2. С.А.Сапаркина, Р.В.Сорокин. Задача идентификации двух коэффициентов при младших производных в системе составного типа// материалы XIV Междунар.науч.конф.,посвящ.памяти генерал. Конструктора раке.-космич. систем академика М.Ф. Решетнева (10-12 нояб. 2010, г. Красноярск) Сиб.гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2010. С.454.
3. И.В. Фроленков, Ю.Я. Белов. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши // Неклассические уравнения математической физики, сб. науч. статей, Отв. ред. А.И. Кожанов, Изд. Института мат., Новосибирск, 2012, С. 262-279.
4. Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. - Utrecht: VSP, 2002. 211p.