УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Сметанина М.С.,
научный руководитель: канд. техн. наук., доцент Анферов П.И.
Сибирский федеральный университет

Рассмотрим плоскую квазистатическую задачу теории термоупругости для полосы $0 \leq y \leq b$. Полоса первоначально находится при постоянной температуре. Одна сторона полосы теплоизолирована, а другая нагревается тепловым потоком, распределенным по заданному закону q(x). Нижняя и верхняя поверхности полосы предполагаются свободными от напряжений.

При дальнейших расчетах динамические эффекты не учитываются. В этом случае напряжения зависят от времени неявно как от параметра через температуру. Теплофизические и механические свойства материала полосы не зависят от температуры. За единицу длины возьмем b, а в качестве единицы времени – отношение величины b^2 к коэффициенту температуропроводности полосы. Запишем основные соотношения термоупругости с безразмерными независимыми переменными.

Уравнения равновесия при отсутствии объемных сил:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Условие совместности деформаций в напряжениях:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \tag{2}$$

$$f=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\beta\theta,\qquad \beta=\frac{\alpha E}{1-\nu}. \tag{3}$$

Где σ_{jk} – компоненты тензора напряжений, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного расширения материала полосы, θ – температура.

Граничные условия для (1) таковы:

$$\sigma_{yy}(x,0)=\sigma_{xy}(x,0)\equiv 0,\qquad \sigma_{yy}(x,1)=\sigma_{xy}(x,1)\equiv 0. \tag{4}$$

Поскольку значения σ_{xx} на верхней и нижней поверхностях полосы не выражаются через внешние силы, то для уравнения (2) граничные условия отсутствуют.

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{5}$$

Начальное условие и граничные условия для (5):

$$\theta\,(x,y,0)=0,\qquad \frac{\partial\theta(x,0,t)}{\partial y}\equiv 0,\qquad \lambda\frac{\partial\theta(x,1,t)}{\partial y}=q(x)h(t)\cdot b. \tag{6}$$

Где $h(t)$ – единичная функция Хевисайда, λ – коэффициент теплопроводности материала полосы.

Представим напряжения интегралами Фурье в комплексной форме:

$$\sigma_{jk}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{jk}(\omega, y, t) \exp(i\omega x)\, d\omega. \qquad (7)$$

$$\bar{\sigma}_{jk}(\omega, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{jk}(x, y, t) \exp(-i\omega x)\, dx, \qquad (8)$$

Здесь и далее чертой сверху обозначено $\bar{\sigma}_{jk}(\omega, y, t)$ преобразование Фурье компонент тензора напряжений.

Применив интегральное преобразование (8) ко всем членам уравнений (1) и (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для преобразований Фурье напряжений:

$$\bar{\sigma}_{xy}{}' + i\omega\bar{\sigma}_{xx} = 0, \qquad \bar{\sigma}_{yy}{}' + i\omega\bar{\sigma}_{yx} = 0, \qquad (9)$$

$$\bar{f}'' - \omega^2 \bar{f} = 0, \qquad (10)$$

с граничными условиями:

$$\bar{\sigma}_{yy}(\omega, 0) = \bar{\sigma}_{xy}(\omega, 0) = 0, \qquad \bar{\sigma}_{yy}(\omega, 1) = \bar{\sigma}_{xy}(\omega, 1) = 0. \qquad (11)$$

Используя (3), для $\bar{\sigma}_{xx}$ запишем:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{f} - \beta\bar{\theta} - \bar{\sigma}_{yy}, \qquad (12)$$

При плоской деформации:

$$\bar{\sigma}_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \beta\bar{\theta} \qquad (13)$$

Исключив $\bar{\sigma}_{xx}$ из первого уравнения (9) с помощью (12), запишем:

$$i\bar{\sigma}_{xy}{}' + \omega\bar{\sigma}_{yy} = \omega(\bar{f} - \beta\bar{\theta}). \qquad (14)$$

Введем новые неизвестные функции σ_1, σ_2 соотношениями:

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_{yy} + i\bar{\sigma}_{xy}, \qquad \sigma_2 = \bar{\sigma}_{yy} - i\bar{\sigma}_{xy}, \qquad (15)$$

которые связаны с искомыми величинами равенствами:

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2i}(\sigma_1 - \sigma_2). \qquad (16)$$

Из (9) и (14) с учетом (15) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\sigma_1{}' + \omega\sigma_1 = \omega(\bar{f} - \beta\bar{\theta}), \qquad \sigma_2{}' - \omega\sigma_2 = -\omega(\bar{f} - \beta\bar{\theta}). \qquad (17)$$

Функции σ_1 и σ_2 в соответствии с формулами (11) и (15) должны удовлетворять условиям:

$$\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0, \qquad \sigma_1(1) = \sigma_2(1) = 0 \tag{18}$$

Частные решения уравнений (17), удовлетворяющие граничным условиям (18) и при y = 0, запишем в виде

$$\sigma_1 = \omega\int_0^y \left(\bar{f} - \beta\bar{\theta}(\xi)\right)e^{\omega(\xi-y)}d\xi\,, \qquad \sigma_2 = \omega\int_0^y \left(-\bar{f} + \beta\bar{\theta}(\xi)\right)e^{-\omega(\xi-y)}d\xi. \tag{19}$$

Общими решениями уравнения (10) являются функции:

$$\bar{f}(\omega, y) = A\exp(-\omega y) + B\exp(\omega y), \qquad \omega \neq 0, \tag{20}$$

$$\bar{f}(0, y) = A_0 y + B_0, \qquad \omega = 0. \tag{21}$$

Подставим $\bar{f}$ из (20) в подынтегральные выражения в (19), и после вычислений получим:

$$\sigma_1 = Ay\omega\exp(-\omega y) + B\,\mathrm{sh}(\omega y) - R_1(y), \tag{22}$$

$$\sigma_2 = -A\,\mathrm{sh}(\omega y) - By\omega\exp(\omega y) + R_2(y), \tag{23}$$

где

$$R_1(y) = \beta\omega\int_0^y \bar{\theta}(\xi)e^{\omega(\xi-y)}d\xi, \qquad R_2(y) = \beta\omega\int_0^y \bar{\theta}(\xi)e^{-\omega(\xi-y)}d\xi. \tag{24}$$

Подчинив σ_1, σ_2 граничным условиям (18) при $y = 1$, получим два линейных алгебраических уравнения, из которых для A и B получаем:

$$\begin{gathered} A = \left(R_1(1)\omega\exp(\omega) - R_2(1)\mathrm{sh}(\omega)\right)[\omega^2 - \mathrm{sh}^2(\omega)]^{-1}, \\ B = \left(R_2(1)\omega\exp(-\omega) - R_1(1)\mathrm{sh}(\omega)\right)[\omega^2 - \mathrm{sh}^2(\omega)]^{-1}, \end{gathered} \tag{25}$$

При ω = 0 формула (12) имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{xx}(0, y) = A_0 y + B_0 - \beta\bar{\theta}(0, y, t). \tag{26}$$

Граничные условия для $\bar{\sigma}_{xx}$ отсутствуют, поэтому удовлетворим их интегрально в смысле принципа Сен-Венана, потребовав выполнения равенств:

$$\int_0^1 \bar{\sigma}_{xx}(0, y)\,dy = 0, \qquad \int_0^1 y\bar{\sigma}_{xx}(0, y)\,dy = 0. \tag{27}$$

Подставив (26) в (27), найдем константы A_0 и B_0.

$$A_0 = \beta(-6I_1 + 12I_2), \qquad B_0 = \beta(4I_1 - 6I_2), \tag{28}$$

где

$$I_1(t) = \int_0^1 \bar{\theta}(0, y, t)\, dy, \qquad I_2(t) = \int_0^1 \bar{\theta}(0, y, t) y\, dy. \tag{29}$$

Чтобы вычислить интегралы (24), (29), нужно знать зависимость от y преобразования Фурье температуры $\bar{\theta}(\omega, y, t)$.

Применив преобразование Фурье ко всем членам (5), (6), получим:

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial y^2} - \omega^2\bar{\theta} \tag{30}$$

$$\bar{\theta}(\omega, y, 0) = 0, \qquad \lambda\frac{\partial\bar{\theta}(\omega, 1, t)}{\partial y} = \bar{q}(\omega)\cdot b. \tag{31}$$

Решением задачи (30), (31) является:

$$\bar{\theta}(\omega, y, t) = \frac{b\bar{q}(\omega)}{\lambda}\left(\frac{ch(\omega y)}{\omega sh(\omega)} - \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(\pi n y)}{\pi^2 n^2 + \omega^2}e^{-p_n t}\right). \tag{32}$$

Подставив $\bar{\theta}(\omega, y, t)$ из (37) в формулы (25), получим:

$$R_1(\omega, y, t) = \omega\beta\frac{b\bar{q}(\omega)}{\lambda}\left[\varphi_n(\omega, t) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{{p_n}^2}\exp(-p_n t)\psi_n(\omega, t)\right], \tag{33}$$

$$R_2(\omega, y, t) = \omega\beta\frac{b\bar{q}(\omega)}{\lambda}\left[\varphi_n(-\omega, t) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{{p_n}^2}\exp(-p_n t)\psi_n(-\omega, t)\right], \tag{34}$$

где

$$\varphi_n(\omega, t) = \frac{sh(\omega y) + \omega y\exp(-\omega y)}{2\omega^2 sh(\omega)} + \exp(-\omega^2 t)(\exp(-\omega y) - 1)\omega^{-3},$$

$$\psi_n(\omega, t) = \omega\cos(\pi n y) + \pi n\cdot\sin(\pi n y) - \omega\exp(-\omega y).$$

Переходя к пределу в (32) при $\omega \to 0$, из (29) получим выражения:

$$I_1(t) = \frac{b}{\lambda}\bar{q}(0)t, \quad I_2(t) = \frac{b}{\lambda}\bar{q}(0)\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{24} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-\pi^2(2k-1)^2 t\right)}{\pi^4(2k-1)^4}\right] \tag{35}$$

Формулы (33), (34), (35) позволяют вычислить A и B в (22), (23) и (28) при всех значениях ω, y, t и затем по (12), (13) и (16) вычислить $\sigma_{jk}(x, y, t)$. Обратные преобразования Фурье (7) для напряжений найдены численными методами.