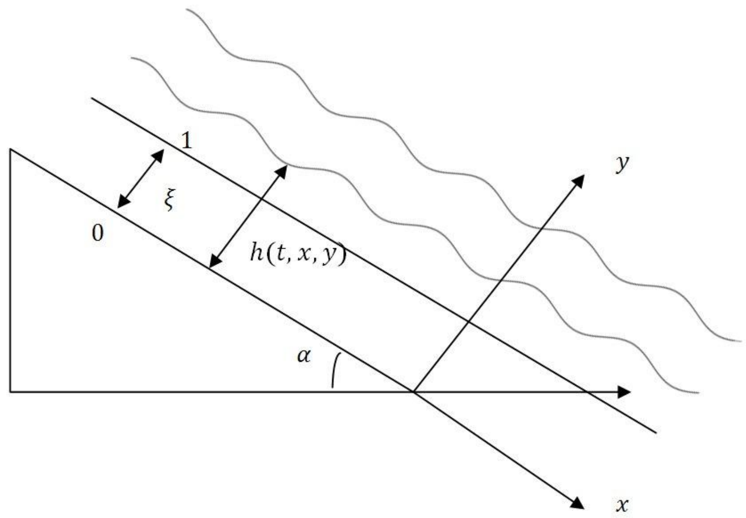
УДК 519.624

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТОНКОЙ ПЛЁНКИ

Зотов И.Н.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В.К.
Сибирский федеральный университет

Стекающие пленки широко применяются в технике для охлаждения электронных устройств, для интенсификации теплообмена и т.д. Поверхностные силы в таком течении могут доминировать над объемными силами или быть сравнимыми с ними. Одно из обнаруженных явлений при локальном нагреве стекающей пленки – это формирование пространственной самоорганизующейся структуры.

Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α. Выберем систему декартовых координат x, y, z так, что ось Oz ортогональна к подложке, а ось Ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x,y,z): -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t,x,y)\}$, где H – толщина пленки и u, v, w – компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$.



При рассмотрении тонкой жидкой пленки, стекающей по наклоненной к горизонту плоской подложке, возникает следующая система уравнений:

$$hD\left(\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_\xi\right) = \theta_{\xi\xi}, \tag{1}$$

$$-p = \Delta h - Ah + Cx, \tag{2}$$

$$h_t - \left(Mh^2\gamma\tilde{\theta}_x + h^3\varphi p_x\right)_x + \left(Mh^2\gamma\tilde{\theta}_y + h^3\varphi p_y\right)_y = 0, \tag{3}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; координата $\xi = z/H\ (t,x,y)$, $p(t,x,y)$, $h(t,x,y)$, $\theta(t,x,y,\xi)$ – безразмерные переменные гидродинамического давления, толщины пленки и температуры жидкости соответственно; A, C, D, M – безразмерные критерии подобия. Числа A, C задают вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и поперечной) составляющих. Число D является отношением порядковых интенсивностей кондуктивных и конвективных потоков тепла в пленке, а модифицированное число Марангони M характеризует действие термокапиллярных сил на поверхности неоднородно нагретой пленки.

Функции $F(t,x,y,\xi)$, $G(t,x,y,\xi)$, $\Phi(t,x,y,\xi)$, $\Gamma(t,x,y,\xi)$, $\varphi(t,x,y)$, $\gamma(t,x,y)$, $\tilde{\theta}(t,x,y)$ определяются с помощью соотношений:

$$F=\int_0^{\xi}\frac{(1-\tau)\,d\tau}{\mu\big(\theta(t,x,y,\tau)\big)},\ \ G=\int_0^{\xi}\frac{d\tau}{\mu\big(\theta(t,x,y,\tau)\big)},\ \ \Phi=\int_0^{\xi}F(t,x,y,\tau)d\tau\,,\ \Gamma=\int_0^{\xi}G(t,x,y,\tau)d\tau,$$

$$\varphi(t,x,y)=\Phi(t,x,y,1),\ \ \gamma(t,x,y)=\int_0^{1}G(t,x,y,\tau)d\tau,\ \ \tilde{\theta}(t,x,y)=\theta(t,x,y,1),$$

где $\mu(\theta)$ – динамическая вязкость.

Модифицированные компоненты вектора скорости:

$$u=-h^3Fp_x-Mh^2G\tilde{\theta}_x,\ \ u=-h^3Fp_y-Mh^2G\tilde{\theta}_y,$$
$$w=\big(h^3\Phi p_x+Mh^2\Gamma\tilde{\theta}_x\big)_x+\big(h^3\Phi p_y+Mh^2\Gamma\tilde{\theta}_y\big)_y.$$

Рассмотрим однонаправленное движение жидкой пленки, стекающей по наклоненной плоской подложке $(\partial/\partial y=0)$, с постоянной вязкостью $(\mu=const)$. Система $(1)-(3)$ примет вид:

$$hD\big(\theta_t+u\theta_x+v\theta_y+w\theta_\xi\big)=\theta_{\xi\xi}, \tag{4}$$
$$-p=h_{xx}-Ah+Cx, \tag{5}$$
$$h_t-\left(\frac{h^3p_x}{3\mu}+Mh^2\frac{\tilde{\theta}_x}{2\mu}\right)_x=0, \tag{6}$$

Далее будем считать, что на поверхности задана температура $\tilde{\theta}(t,x)$. Тогда температура внутри пленки $\theta(t,x,\xi)$ найдется как решение первой начально-краевой задачи для уравнения (4): $\theta(0,x,\xi)=\theta_0(x,\xi)$, $\theta(t,x,0)=\theta_1(t,x)$, $\theta(t,x,1)=\tilde{\theta}(t,x)$. Поэтому основной является задача $(5)-(6)$. Для неё решается задача групповой классификации по отношению к произвольной функции $\tilde{\theta}(t,x)$ и постоянных A, C, M.

Пусть $h=u^1$, $p=u^2$, $\frac{h^3p_x}{3\mu}+Mh^2\frac{\tilde{\theta}_x}{2\mu}=u^3$, $\tilde{\theta}_x=q(x,t)$, $\tau=\mu^{-1}t$. Тогда система примет вид:

$$u^2+u^1_{xx}-Au^1+Cx=0, \tag{7}$$
$$u^1_t-u^3_x=0, \tag{8}$$
$$h_t-\left(\frac{h^3p_x}{3\mu}+Mh^2\frac{\tilde{\theta}_x}{2\mu}\right)_x=0, \tag{9}$$

На первом этапе группового анализа системы уравнений $(7)-(9)$ исследуются свойства её инвариантности относительно преобразований пространства всех независимых и зависимых переменных $R^6(x,y,t,u^1,u^2,u^3)$. Продолженный инфинитезимальный оператор (выписаны только существенные слагаемые):

$$X_2=\xi^1\frac{\partial}{\partial t}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x}+\eta^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\eta^2\frac{\partial}{\partial u^2}+\eta^3\frac{\partial}{\partial u^3}+\zeta^1_1\frac{\partial}{\partial u^1_t}+\zeta^1_2\frac{\partial}{\partial u^1_x}+\zeta^3_2\frac{\partial}{\partial u^3_x}+\zeta^1_{22}\frac{\partial}{\partial u^1_{xx}}, \tag{10}$$

где компоненты векторного поля $(\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2,\eta^3)$ являются функциями переменных (x,y,u^1,u^2,u^3).

Используя классическую методику, после достаточно длинных вычислений находим общее решение определяющих уравнений:

$$\xi^1=C_1,\qquad \xi^2=C_2,\qquad \eta^1=0,\qquad \eta^2=0,\qquad \eta^3=0 \tag{11}$$

и условие на функцию $q(x,t)$:

$$M(C_1q_t+C_2q_x)=0, \tag{12}$$

Можно сделать следующие выводы:

1) Если $M = 0$ и $q(x,t)$ – произвольная, то $C_1 = C_2 = 0$ и допускаются только тождественные преобразования;

2) Если $M \neq 0$, то $mq_t + nq_x = 0$. Тогда:

$a)$ если $m \neq 0$, то $nq_x + q_t = 0$. Отсюда $q = q(x - nt) = q(\xi)$, $C_2 q_\xi - nC_1 q_\xi = 0$, т.е. $C_2 = nC_1$. Поэтому $\xi^2 = nC_1$ и допускается оператор $X = \partial_t + n\partial_x$;

$b)$ если $n = 0, m \neq 0$, то $q = q(x)$ и допускается оператор сдвига по времени $X = \partial_t$;

$c)$ если $m = 0, n \neq 0$, то $q = q(t)$ и допускается оператор сдвига по координате x $X = \partial_x$;

$d)$ если $q = const$, то допускаются одновременно два оператора $X_1 = \partial_t$ и $X_2 = \partial_x$.

Замечание 1. Если $q = q_0(t)x$ и $h = h(t)$, то уравнение (6) примет вид: $h_t = \frac{Mh^2 q_0(t)}{2\mu}$. Откуда

$$h(t) = \frac{h_0}{1 - \frac{h_0 M}{2\mu}\int_0^t q_0(\tau)\,d\tau} \qquad (13)$$

Подбирая $q_0(t)$ можно рассматривать разные режимы плёнки.

Замечание 2. Рассмотрим уравнение (6). Без ограничения общности, можно переписать его в виде:

$$h_t = \left(\frac{h^3}{3}(-h_{xxx} + Ah_x - C) + \frac{Mh^2}{2}q(x,t)\right)_x. \qquad (14)$$

Рассмотрим преобразование растяжения всех переменных: $h = \alpha\bar{h}$, $x = \beta\bar{x}$, $\tau = \gamma\bar{\tau}$. Тогда уравнение (14) сводится к следующему:

$$\bar{h}_{\bar{\tau}} = \frac{\alpha^3\gamma}{\beta^4}\left(\frac{\bar{h}^3}{3}\left(-\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + A\bar{h}_{\bar{x}} - \frac{\beta^3}{\gamma}C\right) + \frac{M\beta^3}{2\alpha^2}\bar{h}^2\bar{q}(\bar{x},\bar{\tau})\right)_{\bar{x}}. \qquad (15)$$

Пусть $\gamma = \alpha^{-3}\beta^4$, тогда вводя новые обозначения

$$\bar{q}(\bar{x},\bar{\tau}) = \bar{q}(\beta\bar{x},\gamma\bar{\tau}),\ \beta^2 A = \bar{A},\ \frac{\beta^3}{\gamma}C = \bar{C},\ \frac{M\beta^3}{2\alpha^2} = \bar{M}, \qquad (16)$$

получим вновь уравнение (6), т.е. преобразование (16), дополненное $\tau = \mu^{-1}t$, суть преобразования эквивалентности этого уравнения. Значит:

1) Если $A \neq 0$, $C \neq 0$, то выбирая $\alpha = \frac{1}{A^{\frac{1}{6}}C^{\frac{1}{3}}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\gamma = \frac{C}{A^{\frac{3}{2}}}$ можно считать $A = 1$, $C = 1$;

2) Если $A = 0$, $C \neq 0$, то выбирая $\alpha = \frac{2^{\frac{1}{7}}}{M^{\frac{1}{7}}C^{\frac{3}{7}}}$, $\beta = \frac{2^{\frac{3}{7}}}{M^{\frac{3}{7}}C^{\frac{2}{7}}}$, $\gamma = \frac{2^{\frac{9}{7}}}{M^{\frac{9}{7}}C^{\frac{1}{7}}}$ можно считать $C = 1, M = 1$;

3) Если $A \neq 0$, $C = 0$, то выбирая $\alpha = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}A^{\frac{3}{4}}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\gamma = \frac{2\sqrt{2}A^{\frac{1}{4}}}{M^{\frac{3}{2}}}$ можно считать $A = 1, M = 1$.