УДК 519.63

ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Горохов А.А.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Распопов В.Е.

Сибирский Федеральный Университет

Институт математики и фундаментальной информатики

В области $D = \{(t,x) |\ 0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1\}$ найти функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ и произведение функций $f_1(t)g_1(x)$ и $f_2(t)g_2(x)$, удовлетворяющие задаче:

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + a_1 u_x(t,x) + b_1 v_x(t,x) + f_1(t)g_1(x), \\ &v_t(t,x) = v_{xx}(t,x) + a_2 u_x(t,x) + b_2 v_x(t,x) + f_2(t)g_2(x). \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ \ 0 \le x \le 1, \qquad v(0,x) = v_0(x),\ \ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t),\ \ 0 \le t \le 1, \qquad v_x(t,0) = \psi_3(t),\ \ 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

$$u_x(t,1) = \psi_2(t),\ \ 0 \le t \le 1, \qquad v_x(t,1) = \psi_4(t),\ \ 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

$$u(T,x) = \alpha_1(x),\ \ 0 \le x \le 1, \qquad v(T,x) = \alpha_2(x),\ \ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u(t,\xi) = \beta_1(t),\ \ \ 0 \le t \le 1. \qquad v(t,\xi) = \beta_2(t),\ \ \ 0 \le t \le 1. \tag{6}$$

где (2)– начальные условия, (3)-(4) – краевые условия, (5)-(6) – условия переопределения, $u_0(x)$, $v_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, $\psi_4(t)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные функции, a_1, a_2, b_1, b_2 – заданные константы, ξ – фиксированная точка из интервала (0,1).

Считаем, что все известные функции достаточное число раз непрерывно дифференцируемы, и выполняются условия согласования.

Поставленная задача относится к классу коэффициентных обратных задач. Данную задачу буду решать численно.

Аналитическими преобразованиями обратная задача сведена к прямой:

$$\begin{aligned} &W_t(t,x) = W_{xx}(t,x) + a_1 W_x(t,x) + b_1 V_x(t,x) + \\ &+\frac{\left(W(0,x) - u_0'''(x) - a_1 u_0''(x) - b_1 v_0''(x)\right)\left(\beta_1''(t) - W_x(t,\xi) - a_1 W(t,\xi) - b_1 V(t,\xi)\right)}{\beta_1'(0) - u_0''(\xi) - a_1 u_0'(\xi) - b_1 v_0'(\xi)}, \\ &V_t(t,x) = V_{xx}(t,x) + a_2 W_x(t,x) + b_2 V_x(t,x) + \\ &+\frac{\left(V(0,x) - v_0'''(x) - a_2 u_0''(x) - b_2 v_0''(x)\right)\left(\beta_2''(t) - V_x(t,\xi) - a_2 W(t,\xi) - b_2 V(t,\xi)\right)}{\beta_2'(0) - v_0''(\xi) - a_2 u_0'(\xi) - b_2 v_0'(\xi)}. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &W(0,x) = W(T,x)\frac{\beta_1'(0) - u_0''(\xi) - a_1 u_0'(\xi) - b_1 v_0'(\xi)}{\beta_1'(T) - \alpha_1''(\xi) - a_1\alpha_1'(\xi) - b_1\alpha_2'(\xi)} - \\ &\quad -\frac{\left(\alpha_1'''(x) + a_1\alpha_1''(x) + b_1\alpha_2''(x)\right)\left(\beta_1'(0) - u_0''(\xi) - a_1 u_0'(\xi) - b_1 v_0'(\xi)\right)}{\beta_1'(T) - \alpha_1''(\xi) - a_1\alpha_1'(\xi) - b_1\alpha_2'(\xi)} + \\ &+u_0'''(x) + a_1 u_0''(x) + b_1 v_0''(x), \\ &V(0,x) = V(T,x)\frac{\beta_2'(0) - v_0''(\xi) - a_2 u_0'(\xi) - b_2 v_0'(\xi)}{\beta_2'(T) - \alpha_2''(\xi) - a_2\alpha_1'(\xi) - b_2\alpha_2'(\xi)} - \\ &-\frac{\left(\alpha_2'''(x) + a_2\alpha_1''(x) + b_2\alpha_2''(x)\right)\left(\beta_2'(0) - v_0''(\xi) - a_2 u_0'(\xi) - b_2 v_0'(\xi)\right)}{\beta_2'(T) - \alpha_2''(\xi) - a_2\alpha_1'(\xi) - b_2\alpha_2'(\xi)} + \\ &+v_0'''(x) + a_2 u_0''(x) + b_2 v_0''(x). \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &W(t,0) = \psi_1'(t), \qquad W(t,1) = \psi_2'(t), \\ &V(t,0) = \psi_3'(t), \qquad V(t,1) = \psi_4'(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Прямая дифференциальная задача аппроксимируется разностной задачей. Разностная задача решается маршевым итерационным методом.

Тестовые расчеты показали сходимость итерационного процесса и сходимость численного решения к точному при уменьшение шагов сетки.

После того, как задача (7)-(9) решена $u(t,x)$, $v(t,x)$, $f_1(t)g_1(x)$ и $f_2(t)g_2(x)$ восстанавливаются по формулам:

$$u(t,x) = \int_\xi^x \int_0^t W(\tau,\eta)d\tau d\eta + u_0(x) - u_0(\xi) + \beta_1(t),$$

$$v(t,x) = \int_\xi^x \int_0^t V(\tau,\eta)d\tau d\eta + v_0(x) - v_0(\xi) + \beta_2(t),$$

$$f_1(t)g_1(x) = \frac{\left(\int_\xi^x W(0,\eta)d\eta + \beta_1'(0) - u_0''(x) - a_1 u_0'(x) - b_1 v_0'(x)\right)}{\beta_1'(0) - u_0''(\xi) - a_1 u_0'(\xi) - b_1 v_0'(\xi)} \cdot$$

$$\cdot \left(\beta_1'(t) - \int_0^t W_x(\tau,\xi)d\tau - a_1 \int_0^t W(\tau,\xi)d\tau - b_1 \int_0^t V(\tau,\xi)d\tau - u_0''(\xi) - a_1 u_0'(\xi) - \right.$$

$$\left. - b_1 v_0'(\xi)\right),$$

$$f_2(t)g_2(x) = \frac{\left(\int_\xi^x V(0,\eta)d\eta + \beta_2'(0) - v_0''(x) - a_2 u_0'(x) - b_2 v_0'(x)\right)}{\beta_2'(0) - v_0''(\xi) - a_2 u_0'(\xi) - b_2 v_0'(\xi)} \cdot$$

$$\cdot \left(\beta_2'(t) - \int_0^t V_x(\tau,\xi)d\tau - a_2 \int_0^t W(\tau,\xi)d\tau - b_2 \int_0^t V(\tau,\xi)d\tau - v_0''(\xi) - a_2 u_0'(\xi) - \right.$$

$$\left. - b_2 v_0'(\xi)\right).$$