УДК 519.6

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ТРАНСФОРМАЦИИ РУСЛОВОГО СТОКА

Корниенко В.С.,
Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент Карепова Е.Д.
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет

1. Введение

В работе исследована классическая модель трансформации речного стока, основанная на интеграле Дюамеля [1]. Параметры модели – средняя скорость потока и коэффициент продольного рассеивания – находятся с помощью оптимизации методом Розенброка. Верификация методики продемонстрирована на основе данных наблюдений за участком реки верхней Волги ниже Иваньковской ГЭС.

2. Прямая задача.

Под прямой задачей трансформации речного стока понимается задача вычисления расхода *Q(t)* в выходном створе открытого русла при известном расходе потока *q(t)* во входном створе и известной передаточной функции.

Для расчета расходов на бесприточном участке открытого русла с поймой на практике широко применяется интеграл Дюамеля, который при нулевых начальных условиях может быть записан в виде

$$Q(t) = \int_0^t q(t-\tau)\, f(\tau) d\tau, \qquad (1)$$

где $Q(t)$ – расход воды в замыкающем (нижнем) створе участка реки, $q(t)$ – расход воды во входном (верхнем) створе, $f(\tau)$ – кривая добегания (передаточная функция) [1].

В гидрологии принято исходить из допущения, что каждой достаточно определенной совокупности условий движения потока (уклонов, глубин, шероховатости и др.) соответствует определенный вид функции $\varphi(\tau)$. Накопленный в гидрологии опыт использования кривых добегания для расчета перемещения водных масс свидетельствует об относительной устойчивости формы этих кривых в довольно широком диапазоне изменения параметров потока.

В работе используется кривая добегания Г.П. Калинина–П.И. Милюкова, которую можно получить, например, на основе вероятностного подхода [1].

Время добегания τ на участке русла, состоящем из n отрезков, может рассматриваться как сумма независимых случайных величин времени добегания τ_i на каждом из них

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = \sum_{i+1}^{n} \tau_i.$$

Время добегания обладает следующими свойствами.

Стационарность означает, что вероятность прохождения n отрезков в промежутке времени от τ до $\tau + \Delta\tau$ не зависит от τ, являясь функцией только $\Delta\tau$ и *n*.

Отсутствие последействия означает, что вероятность прохождения заданного числа отрезков n за время τ не зависит от того, какое число отрезков и за какое время было пройдено ранее.

Ординарность выражает требование практической невозможности прохождения элементарным объемом воды двух или более отрезков за бесконечно малый промежуток времени $\Delta\tau$.

Наконец, считается [2-3], что вероятность прохождения одного отрезка за малый промежуток времени $\Delta\tau$ пропорциональна длительности этого промежутка с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$P(n-1,\Delta\tau)=\lambda\Delta\tau+0(\Delta\tau).$$

Если считать перечисленные требования выполненными, то плотность распределения времени добегания элементарных объемов воды на фиксированном участке потока из n отрезков может быть представлена в следующем виде:

$$f(\tau)=\frac{\lambda^n\tau^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda\tau), \qquad (2)$$

где λ – среднее число отрезков русла, которые элементарный объем проходят за единицу времени.

Величина $\overline{\tau}_1=1/\lambda$ характеризует среднее время добегания на одном отрезке русла. Подставляя в формулу (2) $\lambda=1\backslash\overline{\tau_1}$, получим кривую добегания Г.П. Калинина–П.И. Милюкова:

$$f(\tau)=\frac{\lambda}{\Gamma(n)}(\lambda\tau)^{n-1}\exp(-\lambda\tau), \qquad (3)$$

Если считать заданными параметры кривой добегания (λ и n), то формулы (1), (3) решают прямую задачу трансформации речного стока. В гидрологии принято задавать среднюю скорость потока на участке и параметр продольного рассеивания частиц, который в конечном счете характеризует ассиметрию кривой добегания. На основе этих величин рассчитываются параметры кривой добегания.

Следует также отметить, что в модель, как правило, вводится коэффициент приведения, который учитывает всегда присутствующий даже на бесприточных участках незначительный боковой приток, а также выход воды на пойму. Таким образом,

$$Q^{num}(t)=K_{pr}Q(t), \qquad (4)$$

где $K_{pr}=\dfrac{\sum_{i=N_1}^{N_2}q(t_i)}{\sum_{N_3}^{N_4}Q(t_i)}$, причем времена $t_{N_1},t_{N_2},t_{N_3},t_{N_4}$ выбираются таким образом, что бы расход в верхнем створе был характерным для рассчитываемого участка, $t_{N_2}-t_{N_1}=t_{N_4}-t_{N_5}$ и $t_{N_3}=t_{N_1}+\overline{\tau}$.

При численной реализации интеграл Дюамеля (1) рассчитывался по формуле Ньютона–Котеса, являющейся обобщением формулы Симпсона.

3. Оптимизация параметров кривой добегания

Задача оптимизации состоит в том, чтобы по данным фактических измерений расходов верхнего $\vec{q}=\{q(t_i)\}_{i=0}^{N}$ и нижнего $\vec{Q}^{fact}=\{Q^{fact}(t_i)\}_{i=0}^{N}$ створов восстановить параметры кривой добегания, при которой минимизируется среднеквадратичное отклонение рассчитанных по (4) расходов $\vec{Q}^{num} = \{Q^{num}(t_i)\}_{i=0}^{N}$ от измеренных, т.е. минимизируется функционал:

$$J(n,\lambda,\vec{q},\vec{Q}^{fact},\vec{Q}^{num}) = \sum_{i=K}^{N} (Q^{num}(t_i) - Q^{fact}(t_i))^2. \tag{5}$$

Из (5) видно, что среднеквадратичное отклонение рассматривается не на всем периоде расчета, а только начиная с некоторого момента. Это связано с тем, что в начальные моменты времени модельное русло не заполнено и вычисленные по (4) значения расходов будут давать заведомо большую погрешность. Момент времени, с которого начинается оптимизация, приблизительно равен среднему времени добегания элементарного объема.

Реализована численная оптимизация параметров кривой добегания с помощью метода Розенброка.

Таким образом, на основе усвоения серии наблюдений за расходами в верхнем и нижнем створах можно получить оптимальные характеристики кривой добегания для соответствующего участка реки.

4. Результаты

Численный эксперимент проводился по данным наблюдений за расходами на участке верхней Волги ниже Иваньковской ГЭС [4]. Тщательные натурные измерения специального попуска Иваньковской ГЭС проводились в августе 1938 г. Результаты этих экспериментов до сих пор являются моделью для проведения численных экспериментов по речному стоку.

Расчеты проводились на участке Иваньковская ГЭС – створ 24.9 км. Шаг по времени, исходя из имеющихся натурных измерений, был выбран 30 минут. При решении прямой задачи по данным [1] средняя скорость потока была принята равной 2.68 км/ч, коэффициент продольного рассеивания для этого участка – 1.6. На рис. 1 представлен вид передаточной функции с учетом минимального времени добегания в 8 шагов по времени.На рис. 2 отображен попуск ГЭС (расход в створе ГЭС), фактические и рассчитанные расходы в нижнем створе (24.9 км). Проведенная оптимизация параметров кривой добегания дала коэффициент продольного рассеивания 1.44655 и среднюю скорость добегания 2.62955 км/ч.

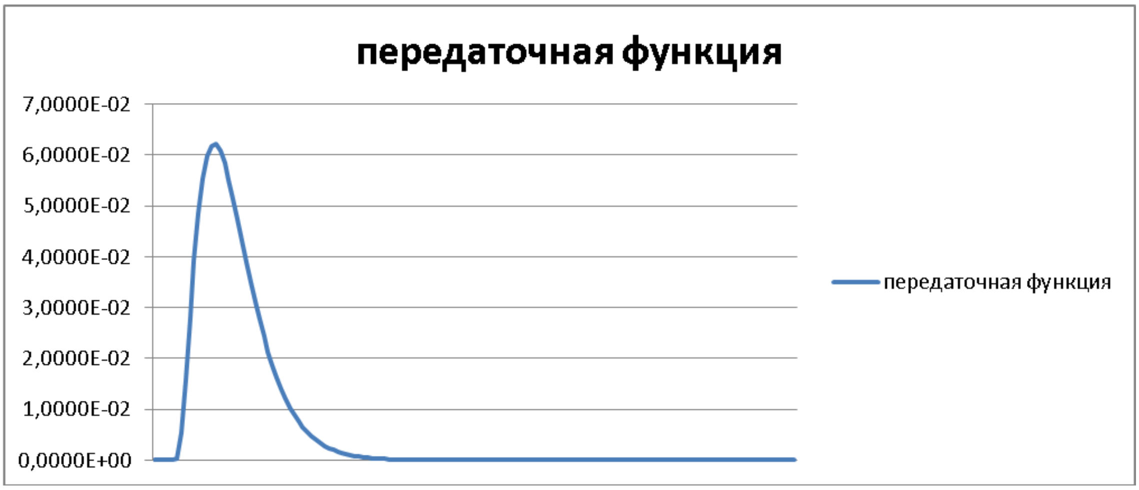

Рис. 1. Вид передаточной функции. Средняя скорость потока 2.68 км/ч, коэффициент продольного рассеивания для этого участка 1.6.

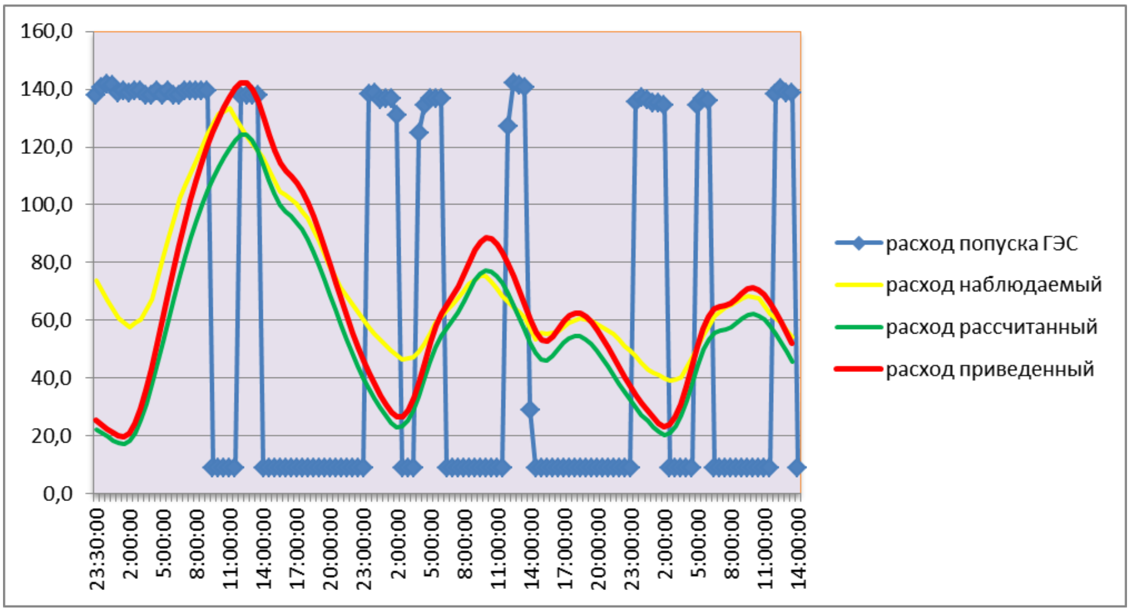

Рис. 2. Решение прямой задачи. Средняя скорость потока 2.68 км/ч, коэффициент продольного рассеивания 1.6.

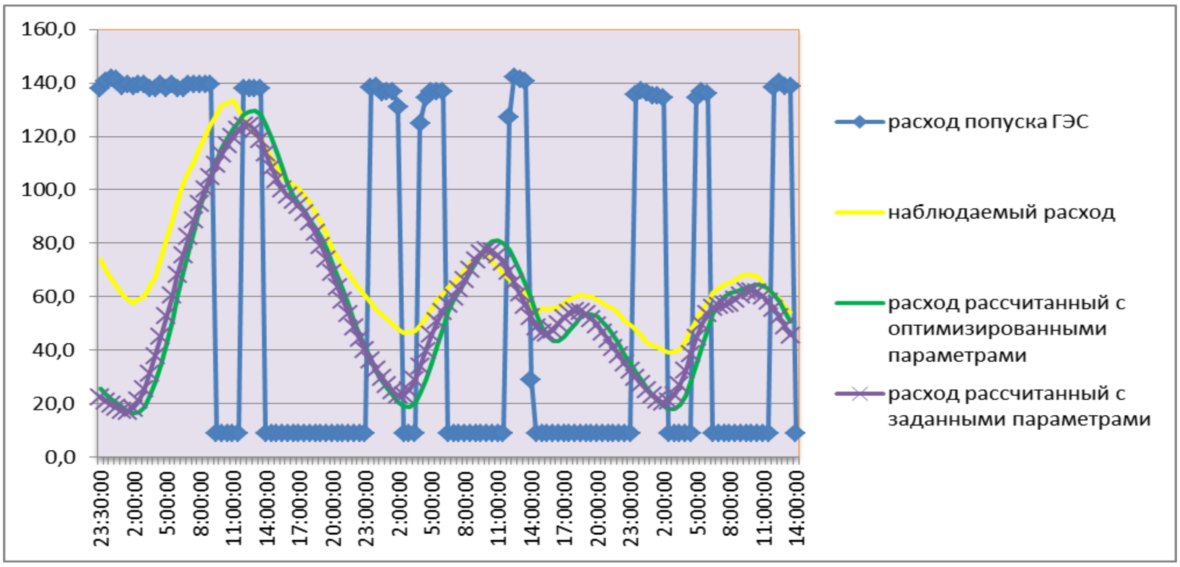

Рис. 3. Результаты оптимизации. Средняя скорость потока 2.62955 км/ч, коэффициент продольного рассеивания 1.44655.

Список литературы

1. Бураков Д.А. Кривые добегания и расчет гидрографа весеннего половодья. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. – М.: Мир, 1967.

3. Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий. – М.: Мир, 1969.

4. Гильденблат Я.Д., Макулов В.В., Семиколенов А.С. Неустановившийся режим нижнего бьефа гидростанции. // Проблемы регилирования речного стока, вып. 2. – М.: АН СССР, 1948.