

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Козлова С.В.,

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Рыжков И.И.

Сибирский Федеральный Университет

Институт космических и информационных технологий

В различной технике и в быту используются системы охлаждения и подогрева, в которых тепло переносится жидкостью, потому во многих практически важных задачах требуется определить распределение температуры в жидкости, подогреваемой или охлаждаемой на границе области. Анализ таких систем приводит к решению дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями.

В классической постановке задачи теплопроводность при переносе тепла в осевом направлении трубы не учитывается, в расширенной постановке она учтена. В работе E. Popoutsakis, D. Ramknishna, H. C. Lim, The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions, расширенная задача была решена для бесконечной цилиндрической трубы, где на одной половине ее стенки нагрета до температуры T_0 , вторая половина – до T_f . В данной работе изучено течение жидкости в трубе, где на конечном участке длины l поддерживается температура стенки T_f , а вне него она равна T_0 .

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости с постоянными физическими свойствами в цилиндрической трубе. Профиль скорости при установившемся течении описывается формулой $v(r) = (1 - r^2)$, ось координат Z совпадает с осью трубы. На участке трубы $0 \leq Z \leq l$ поддерживается постоянная температура стенки T_f , на внешних участках, при $Z < 0$ и $Z > l$, температура стенки равна T_0 .

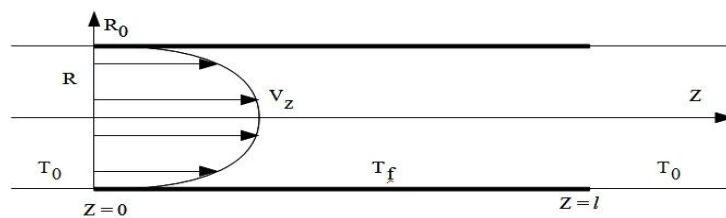


Рис. 1. Схема движения жидкости

Уравнение переноса тепла и граничные условия заданы следующим образом:

$$\rho c_p v_z(R) \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{k}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}, \quad 0 < R < R_0, \quad -\infty < Z < \infty \quad (1)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\partial T}{\partial R} = 0 \quad \text{для любого } Z, \quad \lim_{Z \rightarrow \pm\infty} T = T_0 \quad \text{для любого } R, \quad (2)$$

$$\text{при } R=R_0, \quad T = \begin{cases} T_0 & Z < 0 \\ T_f & 0 \leq Z \leq l \\ T_0 & Z > l \end{cases} . \quad (3)$$

В безразмерной форме постановка задачи (1-3) записывается как:

$$v(r) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad 0 < r < 1, \quad -\infty < z < \infty \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \theta = 0 \text{ для любого } R, \quad (5)$$

$$\text{при } r = 1, \quad \theta = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ 0 & 0 \leq z \leq l \\ 1 & z > l \end{cases}, \quad (6)$$

Безразмерные переменные задаются следующим образом:

$$\theta \equiv \frac{T - T_f}{T_0 - T_f}, \quad z \equiv \frac{z}{PeR}, \quad r \equiv \frac{r}{R_0}, \quad v(r) \equiv \frac{v_z(r)}{V}, \quad L \equiv \frac{l}{PeR_0},$$

где $Pe \equiv \frac{\rho c_p V R_0}{k}$ – число Пекле, V – характеристическая (максимальная) скорость.

Необходимо найти распределение температуры в трубе.

2. Решение

Для решения поставленной задачи (4-6) определим функцию, которая характеризует количество тепла, переносимое через круговую область радиуса R путем теплопроводности и путем конвекции:

$$\Sigma(z, r) = \int_0^r \left[-\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + v_z(r') \theta \right] r \pi r' dr', \quad (7)$$

$$\Sigma(z, 0) = 0, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow \mp\infty} \Sigma(z, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Благодаря введенной функции преобразуем уравнение переноса тепла (4) в систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = Pe^2 v_z(r) \theta - \frac{Pe^2}{2r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial r} = 2r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (9)$$

и перепишем ее в операторном виде $\frac{d}{dz} \mathbf{F}(z, r) = \mathbf{L} \mathbf{F}(z, r)$, где

$$\mathbf{F}(z, r) = \begin{bmatrix} \theta(z, r) \\ \Sigma(z, r) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} Pe^2 v_z(r) & -\frac{Pe^2}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \\ 2r \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее будем решать задачу нахождения функций $\theta(z, r)$ и $\Sigma(z, r)$, удовлетворяющих граничным условиям (5-6), (8-9).

Оператор \mathbf{L} действует в гильбертовом пространстве функций $D(\mathbf{L}) = \{\phi \in \mathbf{H}: \exists \mathbf{L}\phi \in \mathbf{H}, \phi_1(1) = \phi_2(0) = 0\}$ с введенным в нем скалярным произведением

$$\langle \phi_j, \psi_j \rangle = \left[\int_0^1 \frac{4}{Pe^2} \phi_1(r) \psi_1(r) r + \phi_2(r) \psi_2(r) \frac{1}{r} \right].$$

Можно показать, что оператор \mathbf{L} самосопряженный, поэтому для него поставим задачу Штурма-Лиувилля

$$\mathbf{L}\phi_j = \lambda_j \phi_j.$$

Как показывают расчеты, оператор \mathbf{L} имеет положительные и отрицательные собственные значения $\{\lambda_j^+\}$, $\{\lambda_j^-\}$, которые соответствуют положительным и отрицательным собственным функциям $\{\phi_j^+\}$, $\{\phi_j^-\}$. Решение для температуры $\theta(z, r)$ ищется в виде ряда

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\langle f, \phi_j^+ \rangle}{\|\phi_j^+\|^2} \phi_j^+ + \frac{\langle f, \phi_j^- \rangle}{\|\phi_j^-\|^2} \phi_j^- \right], \quad \text{где } \|\phi\|^2 = \langle \phi, \phi \rangle.$$

Коэффициенты разложения, зависящие от продольной координаты z , находятся из уравнения

$$\frac{d}{dz} \langle F, \phi_j \rangle = \lambda \langle F, L \phi_j \rangle + 2\phi_{j2}(1)\omega(z).$$

Результаты

В результате произведенных вычислений были получены следующие выражения для температуры на трех участках трубы:

$$\theta^-(z, r) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^+ e^{\mu_j^{+2} z} (1 - e^{-\mu_j^{+2} L}) \phi_{j1}^+(r), \quad z < 0,$$

$$\theta^i(z, r) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j^- e^{-\mu_j^{-2} z} \phi_{j1}^-(r) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j^+ e^{\mu_j^{+2}(z-L)} \phi_{j1}^+(r), \quad 0 \leq z \leq L,$$

$$\theta^+(z, r) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^- e^{\mu_j^{-2} z} (1 - e^{-\mu_j^{-2} L}) \phi_{j1}^-(r), \quad z > L,$$

где коэффициенты A_j^+ и A_j^- задаются функциями

$$A_j^+ = 2 \left[\mu_j^+ \frac{d\phi_{j2}^+(1)}{d\mu_j^+} \right]^{-1}, \quad A_j^- = -2 \left[\mu_j^- \frac{d\phi_{j2}^-(1)}{d\mu_j^-} \right]^{-1}, \quad \lambda_j^- = -(\mu_j^-)^2, \quad \lambda_j^+ = (\mu_j^+)^2$$

Собственные функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r} (r\phi_{j1}')' + \left[\frac{\lambda_j}{Pe^2} - v_z(r) \right] \lambda_j \phi_{j1} = 0,$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_{j1}^- &= \exp\left(-\frac{\mu_j^-}{2} r^2\right) M(a_j^-, 1, \mu_j^- r^2), & a_j^- &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_j^-}{2} - \frac{\mu_j^{-3}}{2Pe^2}\right), \\ \phi_{j1}^+ &= \exp\left(-\frac{i\mu_j^+}{2} r^2\right) M(a_j^+, 1, i\mu_j^+ r^2), & a_j^+ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{i\mu_j^+}{2} - \frac{(i\mu_j^+)^3}{2Pe^2}\right), \end{aligned}$$

где $M(a_j^{\pm}, 1, \mu_j^{\pm})$ есть функции Куммера. Из характеристического уравнения $M(a_j^{\pm}, 1, \mu_j^{\pm}) = 0$ находятся собственные значения оператора.

Для удобства представления результатов в графическом виде введем новую температуру по формуле $\theta^* = \frac{T-T_0}{T_f-T_0}$. Тогда

$$\text{при } r = 1, \quad \theta^* = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & 0 \leq z \leq L \\ 0 & z > L \end{cases}.$$

На рисунках 2 и 3 изображены графики распределения температуры в трубе. На рис. 2а при $r = 1$ температура стенки представляется единичной «ступенькой», с уменьшением радиальной координаты профиль температуры становится более пологим и изменяется монотонно. Это объясняется тем, что жидкость, проходя через участок трубы с температурой стенки T_f (в безразмерной форме – равной единице) прогревается у оси трубы постепенно, а у стенки ее температура изменяется скачкообразно. С увеличением скорости движения жидкости растет число Пекле Pe , а вместе с тем изменяется характер профиля температуры – усиливается его пологость, что видно из рис. 2б.

Еще более ясную картину дает вид распределения температуры в трубе. При движении жидкости появляются температурные пограничные слои, на рис. 3 они показаны темным цветом. Слои смыкаются тем дальше, чем выше число Пекле, то есть чем выше скорость течения.

При малых числах Пекле необходимо учитывать влияние теплопроводности жидкости, поскольку за счет медленного течения (без ограничений общности примем, что $T_f > T_0$) из секции, где $0 \leq Z \leq l$, тепло от стенки передается в область перед входом в подогреваемый участок.

Проведенный анализ результатов показал соответствие математических расчетов физической природе рассмотренного процесса.

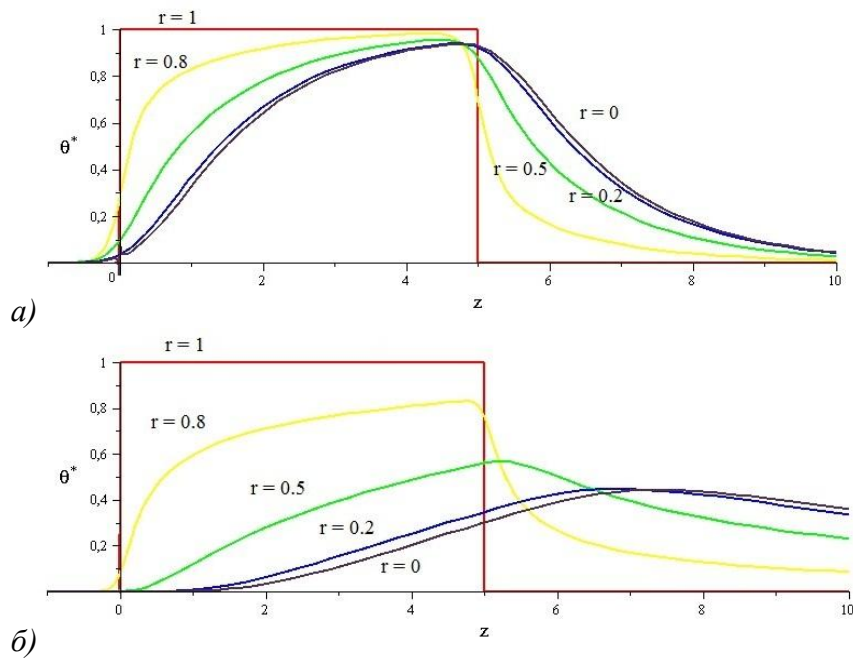


Рис. 2. Профиль температуры в продольном сечении трубы для различных значений чисел Пекле: а) $Pe=10$; б) $Pe=50$.

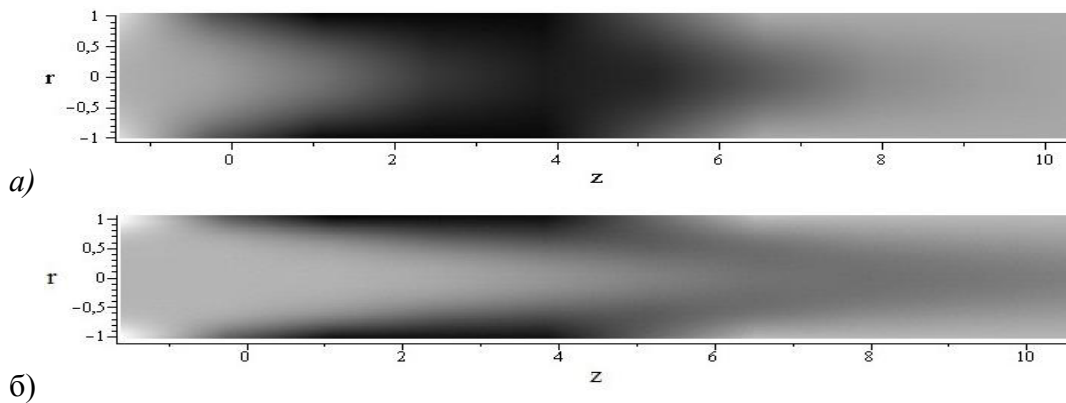


Рис. 3. Распределение температуры в трубе для чисел Пекле: а) $Pe=10$; б) $Pe=50$.

Исследование выполнено в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2011-2013 г.» при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, Соглашение 8756.