УДК 517.91

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Козулин О.А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, проф. Бадуленко Л.Н.
Лесосибирский педагогический институт

Для изучения объектов или процессов, протекающих в окружающем нас мире, широко используются методы математического моделирования. Математические модели являются мощным средством познания окружающего мира. При этом следует заметить, что построенная математическая модель не может отразить все многообразные и сложные черты изучаемого явления. При моделировании что-то является главным, а что-то – второстепенным, чем можно пренебречь.

Изучение большого круга задач естествознания, техники и механики, биологии, медицины и других отраслей научных знаний показывает, что решение многих из них сводится к математическому моделированию процессов в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости.

Так, например, некоторые процессы в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, движение космических объектов, модели экономического развития исследуются с помощью уравнений, в которых кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержатся производные неизвестных функций (или их дифференциалы). Такие уравнения называются дифференциальными.

Вот почему возможности применения дифференциальных уравнений для решения задач по дисциплинам естественно – научного цикла довольно широки. Обыкновенные дифференциальные уравнения моделируют явления и процессы, которые описываются одной функцией или вектор-функцией одного переменного. В математическое исследование любой задачи реального мира можно выделить три основных этапа:

1. построение математической модели явления;
2. изучение этой математической модели и получение решения соответствующей математической задачи;
3. приложение полученных результатов к практическому вопросу, из разрешения которого возникла данная математическая модель, и отыскание других вопросов, к которым она применима.

В таблице представлены основные области наук, в которых какое-либо явление или процесс можно записать в виде дифференциального уравнения.

Таблица.

Область естествознания	Характеристика составления математической модели	Пример математической модели
Физика	1. Установить величины, изменяющиеся в данном явлении, и выявить физические законы, связывающие их. 2. Выбрать независимую переменную и функцию этой искомой переменной. 3. Исходя из условий задачи, определить начальные или краевые	А) Первый закон Ньютона: $x''(t) = \frac{F(t)}{m}$. Б) Уравнение показательного роста и показательного убывания:

	условия. 4. Выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. 5. Исходя из условий задачи и физического закона, которому подчиняется данное явление, составить дифференциальное уравнение. 6. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. 7. По начальным или краевым условиям найти частное решение. 8. Исследовать полученное решение.	$f'(x) = kf(x),$ где k – некоторая константа. В) Уравнение гармонического колебания: $f''(t) = -\omega^2 f(t),$ где ω – положительная постоянная. Г) Метеороид: $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{gR^2}{r^2},$ где R – радиус Земли, r – расстояние между центрами метеороида и Земли, g – ускорение свободного падения.
Геометрия	1. Сделать чертёж и ввести обозначения; 2. Отделить условия. Имеющие место в произвольной точке искомой линии, от условий, выполняющихся лишь в отдельных точках; 3. Выразить все упомянутые в задаче величины через координаты произвольной точки и через значение производной в этой точке, учитывая геометрический смысл производной; 4. По условию задачи составить дифференциальное уравнение; 5. Найти общее решение этого уравнения и получить из него с помощью начальных условий уравнение искомой линии.	Формула зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку: $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$
Биология	При создании математической модели используют физические закономерности, выявленные при экспериментальном изучении объекта моделирования. Так, например, математическая модель кровообращения основано на законах гидродинамики.	Модель хищник – жертва: $\frac{dx}{dt} = (a - by)x,$ $\frac{dy}{dt} = (kx - l)y,$ где a, b, k, l – положительные константы, y – число хищников, x – число жертв.
Химия	Сущность химических реакций сводится к разрыву связей в исходных веществах и возникновению новых связей в продуктах	Закон действующих масс:

	реакции. При этом общее число атомов каждого элемента до и после реакции остаётся постоянным.	$v = k\prod_{i=1}^{n} c_{Ai}$, где c_{Ai} – концентрации веществ Ai $(i = 1,\ldots,n)$, k – коэффициент пропорциональности.
Экономика	Базовая математическая модель в области финансов формулируется в терминах стохастических процессов, приводящих, таким образом, к стохастическим дифференциальным уравнениям. Время и недостоверность являются главными элементами моделирования финансового поведения экономических агентов.	Модель фондового (биржевого) ценообразования: $u_t + \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx}Bxu_x - Cu =$ где A, B и C – постоянные коэффициенты, связанные с характеристиками модели.
Медицина	Компартментальное моделирование распространено в медицине и биологии. Согласно определению американского фармаколога и биохимика Шеппарда компартмент — это некоторое количество вещества, выделяемое в биологической системе и обладающее свойством единства, поэтому в процессах транспорта и химических преобразований его можно рассматривать как целое. Например, в качестве особых компартментов рассматривают весь кислород в легких, всю углекислоту в венозной крови, количество введенного препарата в межклеточной жидкости, запас гликогена в печени и т.п. Модели, в которых исследуемая система представляется в виде совокупности компартментов, потоков вещества между ними, а также источников и стоков всех веществ, называются компартментальными.	Модель роста опухоли: $u_t = f(u) - (uc_x)_x$, $c_t = -g(c,u)$, где u – концентрация опухолевых клеток, c – внеклеточная матрица (например, IV тип коллагена).

В заключение отметим, что математическая модель является основой математически оформленной теории того или иного явления, а аппарат дифференциальных уравнений нашел большое применение в математическом моделировании.
Результативность математического моделирования подтверждена всей человеческой практикой, это сильное средство научного исследования, которое используют в каждой конкретной области науки.