УДК 530.12:531.51

МОДЕЛЬ τ-ЛЕПТОННОЙ ЗВЕЗДЫ

Атрохова М.А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Паклин Н.Н.
Сибирский федеральный университет

Исследовано статическое сферически симметричное распределение сверхплотного вещества в рамках общей теории относительности. Такие модели используются для описания внутреннего строения релятивистских звезд. Гравитационное поле внутри звезды вычисляется с помощью неоднородных, т.е. не вакуумных уравнений Эйнштейна

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik}\,, \tag{1}$$

здесь G_{ik} – тензор Эйнштейна, описывающий геометрию пространства, T_{ik} – тензор энергии-импульса, описывающий физические свойства вещества.

Релятивистская звезда представляет собой статический шар массой M и радиусом R. Снаружи шара вещества нет, т.е. вакуум. Вещество внутри шара описывается тензором энергии-импульса идеальной жидкости, без вязкости, теплопроводности и излучения

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - p g_{ik}\,, \tag{2}$$

где ε – плотность энергии, p – давление, 4-скорость $u_i = dx^i / ds$, g_{ik} – метрический тензор, соответствующий квадрату интервала

$$ds^2 = y^2 dt^2 - z^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{3}$$

В работе используется геометрическая система единиц. Скорость света c и постоянная тяготения Ньютона G приняты равными единице. Размерный коэффициент $\kappa = 8\pi\, G / c^4$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, в геометрической системе единиц равна 8π. Латинские индексы пробегают значения $i, j, k = 0, 1, 2, 3$. Компоненты 4-мерного радиус-вектора в сферической системе координат определяются как $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$, где t – время, r – радиальная переменная, θ и ϕ угловые переменные. Функции ε, p, y, z зависят только от переменной r.

Выпишем уравнения Эйнштейна в явном виде

$$8\pi\,\varepsilon = (1 - z) / r^2 - z' / r\,, \tag{4}$$

$$8\pi\, p = (z - 1) / r^2 + 2zy' / ry\,, \tag{5}$$

$$2r^2 zy'' + (rz - 2z')ry' + [2(1 - z) + rz']y = 0\,. \tag{6}$$

Чтобы проинтегрировать уравнения (4) – (6), необходимо задать дополнительное условие. Можно задать уравнение состояния, так было сделано в работе [1]. Такой подход требует численного интегрирования и только в исключительных случаях удается получить аналитическое выражение. В работе [2] был предложен другой подход к моделированию релятивистских звезд. Этот подход основан не на уравнении состояния во всем объеме звезды, а на точном решении уравнений Эйнштейна для статического сферически симметричного распределения идеальной жидкости. После того как аналитическая модель релятивистской звезды построена, исследуются ее физические свойства. Чтобы оценить пригодность такой модели для описания нейтронных звезд, задается уравнение состояния нейтронного газа в центре шара.

Именно такой подход используется в данной работе, но мы обратим внимание на важный вопрос: как изменятся физические свойства модели, если вместо нейтронов использовать газ τ-лептонов.

Нейтроны и лептоны являются фермионами. Если высокая плотность внутри шара обеспечивает условие вырождения, то оба сорта частиц можно описывать уравнением состояния для идеального вырожденного ферми-газа

$$\varepsilon_0 = K\cdot[\mathrm{sh}(f) - f], \qquad p_0 = \frac{K}{3}\cdot\left[\mathrm{sh}(f) - 8\,\mathrm{sh}\left(\frac{f}{2}\right) + 3f\right], \tag{7}$$

где $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(r=0)$, $p_0 \equiv p(r=0)$, $K = \pi m_0^{\,4} c^5 / 4h^3$, здесь используются обычные обозначения для скорости света и постоянной Планка, m_0 – масса покоя фермиона, $f = 4Arsh(P_f / m_0 c)$, P_f – ферми-импульс.

Таким образом, различие физических свойств моделей будет определяться различными массами нейтронов и τ-лептонов. Приведем справочные сведения о массах $m_n = 939{,}573$ МэВ, $m_\tau = 1784{,}1$ МэВ, $(m_\tau / m_n)^2 = 3{,}6$.

В качестве аналитической модели используем простейшее решение уравнений Эйнштейна – внутреннее решение Шварцшильда

$$z = 1 - \kappa\varepsilon_0\, r^2/3, \tag{8}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{1-\kappa\varepsilon_0\, R^2/3} - \sqrt{1-\kappa\varepsilon_0\, r^2/3}\right), \tag{9}$$

$$p = \varepsilon_0\left[\frac{\sqrt{1-\kappa\varepsilon_0\, r^2/3} - \sqrt{1-\kappa\varepsilon_0\, R^2/3}}{3\sqrt{1-\kappa\varepsilon_0\, R^2/3} - \sqrt{1-\kappa\varepsilon_0\, r^2/3}}\right]. \tag{10}$$

Это решение сшито на границе шара $r = R$ с внешним решением Шварцшильда

$$z = 1 - 2M/r, \tag{11}$$

$$y = \sqrt{1-2M/r}\,. \tag{12}$$

Сшивка позволила выразить внешние астрономически наблюдаемые параметры звезды – массу M и радиус R, через внутренние параметры звезды – давление и плотность в центре звезды.

$$R = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{k(1+2k)}}{\sqrt{\kappa\varepsilon_0}(1+3k)}, \quad k = p_0 / \varepsilon_0 . \tag{13}$$

$$M = \kappa\varepsilon_0 \, R^3 \cdot c^2 / 6G . \tag{14}$$

Из выражений (13) и (14) видно, что

$$R \propto \varepsilon_0^{\ -1/2} \quad \Rightarrow \quad M \propto \varepsilon_0^{\ -1/2}, \qquad \varepsilon_0^{\ 1/2} \propto m_0^{\ 2} . \tag{15}$$

В астрофизике звезд важную роль играет зависимость масса-радиус $M(R)$. По виду этой зависимости можно сделать выводы о запасе устойчивости модели. Устойчивым равновесным состояниям отвечает участок кривой с $dM/dR < 0$. Максимум кривой указывает на критическое состояние модели.

Давление и плотность в центре звезды являются свободными параметрами, которые следует связать уравнением состояния идеального вырожденного ферми-газа (7), что позволило вычислить критические параметры модели: максимальную массу и соответствующий равновесный радиус, а соотношения (15) помогают изобразить кривые для нейтронных и τ-лептонных звезд в сравнении. См. рисунки 1 и 2.

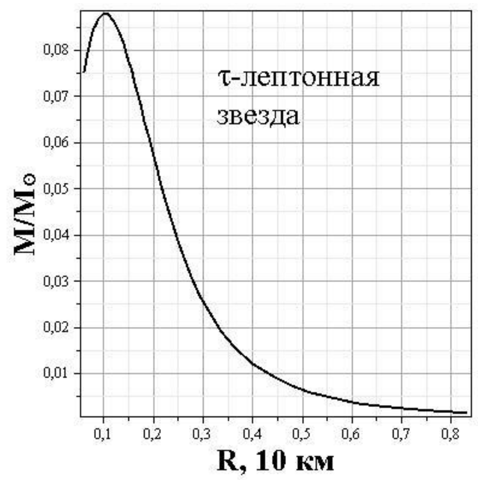

Рис. 1

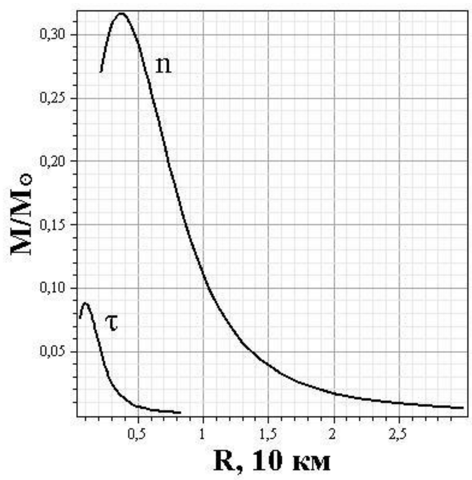

Рис. 2

Вывод: максимальная масса и минимальный радиус τ-лептонной звезды почти в 3 раза меньше, чем у нейтронной. Рост гравитации опережает рост давления ферми-газа при увеличении массы фермиона.

1. Oppenheimer J. R., Volkoff G. M. On massive Neutron Cores // Phys. Rev. – 1939. – V. 55. – P. 374. (имеется русский перевод: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. – С. 337 – 352).
2. Tolman R.C. Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid // Phys. Rev. – 1939. – V. 55. – P. 364 – 373.